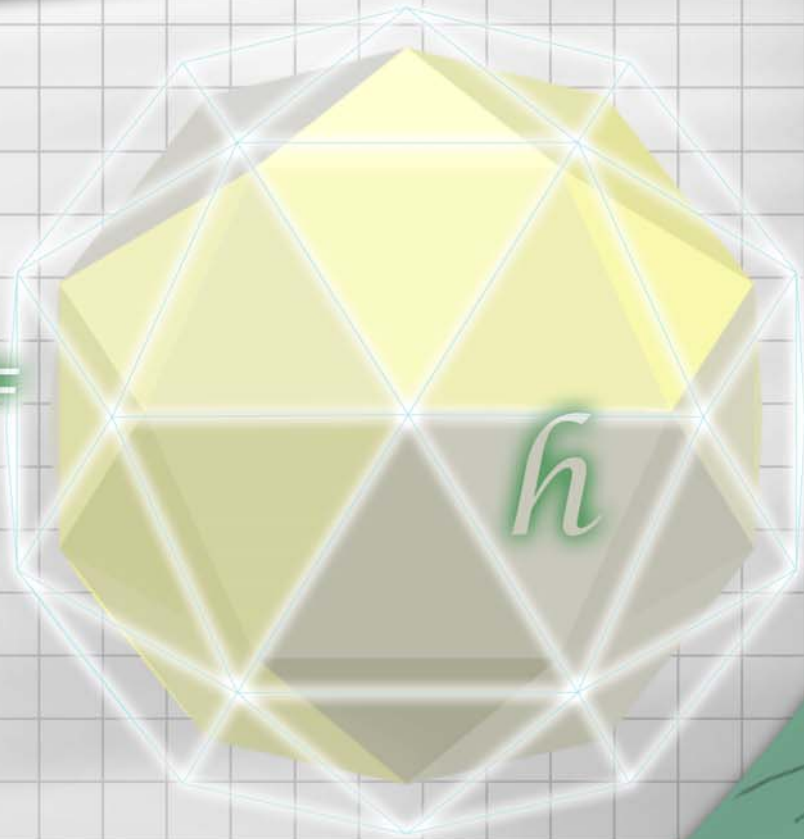


Matemáticas I

Solución de problemas reales



$$x - 12 =$$



6



Libro para el Aprendizaje

COLEGIO DE BACHILLERES

MATEMÁTICAS I
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALES

D. R. © 2010, COLEGIO DE BACHILLERES, 1ª. ED., 2010
Prolongación Rancho Vista Hermosa Núm. 105
Col. Ex Hacienda Coapa
Delegación Coyoacán, C.P. 04920, México D.F.

DIRECTORIO

Roberto Castañón Romo
Director General

Luis Miguel Samperio Sánchez
Secretario General

Miguel Ángel Báez López
Director de Planeación Académica

La presentación y disposición en conjunto de Matemáticas I Solución de problemas reales son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información) sin consentimiento por escrito del editor.

ISBN en trámite.

PRESENTACIÓN

El Colegio de Bachilleres, en el contexto de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), ha diseñado este **Libro para el Aprendizaje** considerando un Modelo Académico por competencias que impulsa el aprendizaje y la enseñanza, a fin de atender la demanda de estudios de nuestra sociedad y contribuir a la formación para la vida, el trabajo y los estudios superiores de jóvenes y adultos.

Este material es un recurso didáctico para el aprendizaje de la asignatura de **Matemáticas I Solución de problemas reales** que conforma el Nuevo Plan de Estudios (2009) del Colegio de Bachilleres. La manera en que está organizado propicia la búsqueda, construcción y aplicación de aprendizajes por parte del estudiante, además de apoyar al docente en su práctica educativa, constituyéndose como mediador pedagógico en el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación.

Es el resultado del compromiso del personal académico de los 20 Planteles del Colegio de Bachilleres, institución educativa interesada en consolidar su liderazgo académico y prestigio social, preparando estudiantes de excelencia, comprometidos consigo mismos y con la sociedad.

Finalmente es importante señalar que este material es la base a partir del cual se promueve la formación de nuestros estudiantes, por ello se les invita a utilizarlo para alcanzar los niveles de desempeño y competencias que deseamos lograr en cada uno de los alumnos del Colegio de Bachilleres.

MATERIALES EDUCATIVOS

MÉXICO D.F., 2010

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

¿CÓMO ESTUDIAR CON EL MATERIAL?

BLOQUE TEMÁTICO UNO

FUNDAMENTOS: ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS

PROPÓSITO

1. Números reales

1.1 Operaciones con números reales

1.2 Operaciones con números racionales

2. Razones y proporciones

2.1 Concepto de razón y proporción

2.2 Proporción directa

2.3 Proporción inversa

3. Series y sucesiones

3.1 Serie aritmética

3.2 La suma de los "n" primeros términos de una serie aritmética

4. Notación científica

5. Leyes de los exponentes

5.1 Exponentes enteros

5.2 Exponentes fraccionarios

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

AUTOEVALUACIÓN

BLOQUE TEMÁTICO DOS APLICANDO EL ALGEBRA

PROPÓSITO

1. Operaciones con polinomios
2. Operaciones de factorización
 - 2.1 Por factor común
 - 2.2 Trinomios de la forma x^2+bx+c (trinomio cuadrado perfecto)
 - 2.3 Trinomio de la forma ax^2+bx+c
3. Operación y simplificación de expresiones algebraicas

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

AUTOEVALUACIÓN

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

BLOQUE TEMÁTICO TRES MODELO DE ECUACIONES

PROPÓSITO

1. Construcción de modelos matemáticos basados en problemas de diversos campos
 - 1.1 Ecuaciones de primer grado con una incógnita
 - 1.2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
 - 1.3 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

AUTOEVALUACIÓN

GLOSARIO

ANEXO

FUENTES DE INFORMACIÓN

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bacilleres - MÉXICO

INTRODUCCIÓN

El Colegio de Bachilleres tiene como compromiso cubrir las necesidades académicas de sus estudiantes en el marco del contexto actual, proporcionarles una formación básica que les permita comprender e incidir en su entorno de manera crítica y fundamentada; una formación para el trabajo que los prepare para insertarse en una cultura laboral y una formación propedéutica que fortalezca sus conocimientos, habilidades y actitudes preparándolos para su ingreso a la educación superior.

La matemática y el lenguaje son fundamentales en tu desarrollo intelectual y son conocidas como las asignaturas que en forma especial te ayudan a aprender a aprender y a aprender a pensar, brindándote así, las competencias básicas e indispensables para tu vida diaria y el mercado laboral.

Es importante que concibas que las matemáticas son agradables, el secreto es aprenderlas relacionando lo que ya sabes con lo nuevo, de esta forma podrás ser capaz de comunicarte, hacer interpretaciones y representaciones; en fin, descubrir que las matemáticas están íntimamente relacionadas con la realidad y con las situaciones que te rodean, no solamente dentro de la institución educativa, sino también en la vida fuera de ella.

El objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas es el desarrollo de la capacidad de razonamiento y de abstracción y ese desarrollo constituye, por tanto, el principal fundamento pedagógico de esta ciencia. Por otra parte, las Matemáticas aparecen a lo largo de la historia y contribuyen, hoy día, al desarrollo como a la formalización de las Ciencias Experimentales y Sociales, a las que prestan un adecuado apoyo para llevar a cabo determinadas operaciones, también, el lenguaje matemático, aplicado a los distintos fenómenos y aspectos de la realidad, es un instrumento eficaz que ayuda a comprender mejor la realidad que nos rodea, dando la oportunidad de descubrir las posibilidades de su propio entendimiento y manejar aspectos prácticos de la vida diaria, así como para acceder a otras ramas de la ciencia.

Este material está elaborado dentro del contexto de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS)¹, la cual es una respuesta que México plantea ante la globalización a través de la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), que se ve concretizado en un Marco Curricular Común, mismo que plantea un perfil del egresado expresado a través de tres tipos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales.

Con el estudio de la asignatura Matemáticas I se busca desarrollar competencias genéricas y disciplinares básicas que tienen como objetivo prepararte para afrontar tu vida personal en relación con el medio social y físico que te rodea, mediante el uso del razonamiento lógico y métodos matemáticos en la construcción de modelos matemáticos, argumentando y generalizando la solución de estos problemas a tu entorno.

Lo anterior lo lograrás a través de la aplicación de estrategias de apoyo para el aprendizaje, que promuevan el estudio independiente,

¹ REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MÉXICO: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad Enero, 2008

Con el fin de facilitar a los escolares una visión general de esta ciencia, la enseñanza de la matemática debe tratarse de forma cíclica, de manera que en cada bloque a la vez que se introducen nuevos contenidos se revisen los anteriores, ampliando su campo de aplicación y enriqueciéndose con nuevas relaciones.

Al mismo tiempo se deberá procurar la adquisición de destrezas numéricas básicas y el desarrollo de competencias geométricas de carácter elemental, así como de estrategias personales que permitan al estudiante enfrentarse ante variadas situaciones problemáticas relacionadas con la vida cotidiana, tal que, la resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La asignatura: "Solución de Problemas Reales" se encuentra ubicada en el área de Formación Básica, dentro del campo disciplinario de matemáticas y se desarrolla en el primer semestre de seis que contempla el programa de estudios del Colegio de Bachilleres.

Son 3 los bloques temáticos que conforman la asignatura "La Aritmética en Solución de problemas reales":

En el Bloque Uno se pretende abordar y rescatar los conocimientos de la aritmética como son las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) mediante la aplicación en problemáticas situadas reales, para que en base a estos conocimientos se aborden los contenidos "Razones y proporciones" tanto en forma directa como inversa buscando sus aplicaciones como situaciones de porcentajes que son de la vida cotidiana entre otros (construcción, producción, etc.) todos aplicables en este contexto. Se abordaran además las series y sucesiones buscando en el estudiante aplique y ejercite áreas cognitivas como la lógica que es una gran base para abordar el lenguaje y notación algebraica además de aplicarlo a situaciones reales ya que la modelación de problemas reales nos van a permitir generalizar y dar solución además constituyen aprendizajes que se retomarán en el bloque temático Tres dentro de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones.

Por último se desarrollarán los contenidos "Leyes de los exponentes" donde se aplicarán apoyándonos no solo en las leyes de los exponentes sino en la de los radicales considerando que estos últimos son la operación inversa.

La propuesta y desarrollo de trabajo que se plantea para el Bloque Dos "Aplicando el Álgebra", tiene diversos propósitos, uno de ellos, es el de inducir a los alumnos a que se encuentren con la necesidad de razonar, operar y aplicar algunas estrategias que le permitan dar soluciones a problemas concretos. Si conseguimos esto, entonces las matemáticas tendrán sentido para los alumnos, al ser utilizadas para conseguir satisfactoriamente los resultados de dichas problemáticas.

Otro propósito es el de desarrollar el aspecto cognitivo, social y personal, que le permita saber que las matemáticas, deben de ser más lógicas y razonadas, y no mecánicas y memorísticas, es por ello que el material didáctico propuesto, debe ser útil y de fácil aplicación, para inducirlos a las enseñanzas de productos notables, factorización y simplificación de expresiones algebraicas, que le permitan lograr y aplicar habilidades específicas y detalladas en dicho bloque, sin olvidar que todos los recursos didácticos son tan solo un vehículo para el aprendizaje y aplicación del Álgebra.

Uno de los objetivos más antiguos que el hombre ha tenido, es buscar procedimientos más sencillos que simplifiquen y faciliten la resolución de problemas matemáticos. El álgebra ha permitido la evolución y progreso de la Ciencia Matemática. De esto abordaremos en el Bloque Tres

Con la aplicación de las ecuaciones de primer grado se solucionan problemas aritméticos, geométricos, trigonométricos, físicos, etc., y también se utilizan en otras áreas de conocimiento como la química, la biología, física entre otras, además también podemos considerarla en nuestra vida cotidiana y por ello es necesario aprender a interpretar, construir y operar con modelos algebraicos.

En este bloque temático, estudiaremos planteamientos de problemas que dan lugar a modelos de ecuaciones lineales, así como los modelos algebraicos para la solución de ellos.

Existen problemas en los que es necesario encontrar dos o tres datos que están relacionados, y al traducirlos al lenguaje algebraico se forman dos o tres ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas. En estos casos decimos que se forma un sistema de ecuaciones lineales.

Resolver un sistema de ecuaciones es realmente sencillo y nos permite interpretar objetivamente un problema. Un sistema de ecuaciones se puede solucionar por el método gráfico y los métodos analíticos, los cuales también se estudiarán en este bloque temático.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

¿CÓMO ESTUDIAR CON EL MATERIAL?

Ante todo ten presente que este material es un facilitador en la construcción de nuevos aprendizajes así como para mejorar tu desempeño académico.

Tu aprendizaje es más importante cuando eres capaz de relacionar tus anteriores o nuevos conocimientos con el mundo que te rodea y aplicarlos en tu vida cotidiana. Para apoyarte a lograr tus metas educativas, hemos elaborado este **Libro para el Aprendizaje** el cual tiene la finalidad de apoyarte en el desarrollo de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes necesarias para que apliques de forma competente tus saberes en tu vida cotidiana. Por ello es importante que conozcas la forma en que está organizado.

TU LIBRO PARA EL APRENDIZAJE CONTIENE:

Bloques Temáticos que son las unidades de conocimiento que vas a estudiar; y se componen por **Núcleos Temáticos** que integran los conceptos, teorías, leyes, procedimientos y valores que abordarás a lo largo del estudio de la asignatura. Cada Bloque está organizado para permitirte aprender con mayor facilidad los contenidos de la asignatura.



Los elementos que componen el material son:

PRESENTACIÓN*

Te da información sobre el enfoque educativo basado en competencias que orientó la construcción de este libro, así como los recursos y estrategias que está desarrollando el Colegio de Bachilleres para ofrecerte una educación integral y de calidad.

INTRODUCCIÓN*

Te proporciona información sobre el contenido del libro. Se especifican los Bloques Temáticos que componen la asignatura, presentando los Núcleos Temáticos más importantes a estudiar así como su vinculación con tu entorno.

PROPÓSITO

Se presenta al inicio de cada Bloque Temático. Te permitirá conocer el desempeño y los aprendizajes (conocimientos, procedimientos y actitudes) que deberás obtener con el estudio de cada bloque. Con él podrás centrar tu reflexión en el aprendizaje de las competencias educativas que adquirirás a lo largo de la asignatura.

*Estos elementos te proporcionan información general de la asignatura

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Son tareas específicas que te permitirán fortalecer tu proceso de aprendizaje a partir de la solución de problemas relacionados con tu vida cotidiana, aplicando los conocimientos que tienes hasta el momento.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

En ella podrás verificar lo que aprendiste. Proporcionándote las respuestas de las Actividades que realizaste a lo largo de los Núcleos Temáticos para que determines aciertos y errores. Esto con el fin de que reflexiones sobre tu proceso de aprendizaje y mejores tu estudio.

RESUMEN

Te facilitará la recuperación y comprensión de la información relevante en cada Núcleo Temático, en donde se destacan la idea central, conceptos, principios o procedimientos claves.

RECAPITULACIÓN

Te permitirá tener una visión general de lo que estudiaste y recuperar y sintetizar los contenidos relevantes que abordaste a lo largo del Bloque Temático.

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Te ayudarán a enriquecer tu aprendizaje a través de ejercicios que pondrán en práctica todos los conocimientos que adquiriste a lo largo del Bloque Temático. En donde los tendrás que integrar y aplicar en una situación particular de tu entorno.

AUTOEVALUACIÓN

Son los resultados y orientaciones que debiste considerar para la solución de las Actividades de Consolidación, con el fin de que corrobore si has logrado alcanzar el propósito del Bloque Temático.

FUENTES DE INFORMACIÓN*

Las encontrarás al final del libro, están divididas en dos secciones. La primera presenta las *Fuentes de Consulta*, las cuales son las referencias documentales en las que se basó el autor para realizar el contenido de este libro. Y las *Lecturas Recomendadas*, como bibliografía o sitios web, que puedes consultar para que obtengas mayor información sobre los temas de interés, relacionadas con la asignatura.

ESTRATEGIAS DE ESTUDIO PARA TU APRENDIZAJE



Es importante que tomes en cuenta que para realizar de mejor manera las Actividades que encontrarás a lo largo de tu “Libro para el Aprendizaje”, deberás emplear diversas **estrategias de estudio** como: mapa conceptual, mapa mental, cuadro comparativo, resumen y ensayo, las cuales te apoyarán para aprender y solucionar problemas tanto académicos como de tu vida cotidiana. A continuación te mencionamos brevemente en qué consiste cada una de ellas.

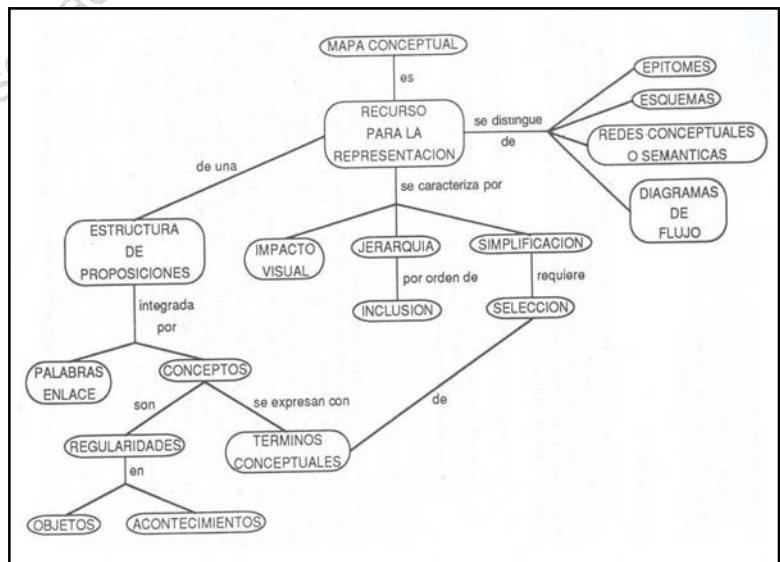
Mapas Conceptuales

Deberás utilizarlos cuando requieras **analizar** la información conceptual de un tema de manera ágil. Lo cual te permitirá organizar y jerarquizar los contenidos a través de conceptos o ideas principales mediante su representación gráfica.

Para elaborarlos requieres:

- Extraer los **conceptos centrales** y hacer un listado con ellos para jerarquizarlos, iniciando con el principal de arriba hacia abajo. Los conceptos se escriben con letra mayúscula.
- Presentarlos en forma de recuadros u óvalos llamados **nodos**.
- Vincular los conceptos utilizando **palabras enlace** de acuerdo a la jerarquización que determinaste. Las palabras enlace se escriben con letra minúscula.

Ejemplo:



Tomado de: Ontoria. 1993. Mapas Conceptuales.

Mapas Mentales

Te servirán para **organizar** de forma gráfica, global y holística tus notas o apuntes, o bien para extraer la idea principal de un tema que estés estudiando. Se diferencian de los mapas conceptuales porque incluyen imágenes que los hacen más atractivos visualmente.

Para elaborarlos requieres:

- Identificar los **conceptos principales** y resaltarlos con **colores** o **símbolos**. Iniciando con el concepto principal en el centro.
- Categorizar los contenidos y representar su relación con líneas, para establecer la vinculación entre ellos.
- Al construirlo debes ser creativo para representar la idea principal de un tema con **imágenes, dibujos, números**, etc.
- Tomar en cuenta que las representaciones visuales que utilices sean representativas para tí.

Ejemplo:



Tomado de: Cervantes, Víctor L. 1998. El ABC de los Mapas Mentales.

Cuadro Comparativo

Te permitirán **contrastar** las semejanzas o diferencias entre los conceptos, ideas o definiciones más relevantes de un tema.

Para elaborarlo requieres:

- Crear una tabla o cuadro para organizar la información.
- En la parte horizontal (filas) o vertical (columnas) del cuadro, se colocan las categorías de comparación.
- El número de columnas o filas del cuadro, dependerá del número de conceptos a identificar y contrastar (mínimo dos).
- La característica principal es destacar o señalar las diferencias o semejanzas entre los conceptos, ideas o definiciones.

Ejemplo:

Tipos	Covalente	Iónico	Molecular	Metálico
Los puntos de la red los ocupan partículas	Átomos	Iones positivos y negativos	Moléculas	Iones positivos
Fuerzas de enlace entre partículas	Electrones compartidos	Atracción electrostática	Fuerzas de Vander Waals dipolo-dipolo intermoleculares	Atracción eléctrica entre iones positivos y negativos
Intensidad de la fuerza de unión	muy fuerte	Algo fuerte	Débil	Depende del número de electrones en movimiento
Propiedades	Duro, alto punto de fusión, no conductores.	Duro, quebradizo, punto de fusión intermedio, no conductores.	Suave, bajo punto de fusión, no conductores.	Rango de dureza y de punto de fusión amplias, buenos conductores
Ejemplos	Diamante, C cuarzo, SiO ₂ carburo de silicio, SiC.	Cloruro de sodio, NaCl; nitrato de potasio, KNO ₃	Yodo, I ₂ ; hielo, H ₂ O; hielo seco, CO ₂ bióxido de carbono (sólido).	Sodio (Na), aluminio (Al), hierro(Fe).

Tomado de: Calvo y Cols. .2009. Curso Multimedia. Química 1

Resumen

Empléalo para **sintetizar** la información más representativa de un tema, para ello identifica los conceptos clave, así como, principios y argumentos centrales del contenido.

Para elaborarlo requieres:

- Elegir el tema, principios y/o los argumentos fundamentales del contenido a resumir.
- Organizar la información, vinculando las ideas y argumentos en un texto escrito.
- A partir de la idea general, elige un título para el resumen.
- La extensión del texto final no debe ser mayor al original.

Ejemplo:

Aplicación del Modelo
El modelo del estado líquido es una ampliación del modelo del estado gaseoso. La diferencia consiste en que en el estado líquido las moléculas que lo componen están mucho más juntas y unidas por fuerzas de atracción.
Estas fuerzas no son lo suficientemente intensas para mantener a las moléculas formando una red rígida, pero sí hay un cierto grado de agregación, como lo muestra el hecho de que un líquido no llena el recipiente que lo contiene. Las moléculas de un líquido tienen movimiento desordenado, aunque éste es más restringido que un gas. Al tener menos espacio entre ellas, están en contacto más estrecho y los choques son más frecuentes que en un gas.
Lo mismo que en los gases, las moléculas de los líquidos tienen energía cinética relacionada con la temperatura. Si una molécula tiene alta energía cinética y está cerca de la superficie del líquido, puede escapar de éste e integrarse en la atmósfera que la rodea, lo que explica la presión de vapor de los líquidos. El proceso mediante el cual las moléculas de un líquido se incorporan al estado gaseoso se llama evaporación.
Algunas moléculas de la superficie de un líquido tienen mayor energía cinética (velocidad) que otras y su elevada energía cinética les permite separarse de ellas y evaporarse. Si la evaporación tiene lugar en un recipiente cerrado, las moléculas que permanecen cerca de la superficie son captadas por el líquido y se condensan, por lo que rápidamente se establece un equilibrio.
La rapidez de salida de las moléculas del líquido es igual a la velocidad de entrada; la presión ejercida por las moléculas del vapor sobre la superficie del líquido se llama presión de vapor, la cual es una característica de cada líquido y varía con la temperatura. Así, pues, la presión de vapor de un líquido es un indicador de la facilidad de volatilización, es decir, a mayor presión de vapor que tenga un líquido más fácilmente formará vapores.
Si a un líquido se le aplica calor, la energía cinética promedio aumenta y, por lo tanto, la temperatura y la velocidad de evaporación. Cuando se calienta un vaso con líquido, se comienzan a formar pequeñas burbujas de vapor, el cual se eleva y sale del líquido. Dicho proceso se llama ebullición; éste, aunque parecido a la evaporación, no debe confundirse.

Tomado de: Calvo y Cols.. 2009. Curso Multimedia. Química 1

Ensayo

Utilízalo para **reflexionar** y expresar tu punto de vista sobre un tema específico. Toma en cuenta que se trata de que argumentes las razones y motivos por las cuales consideras importante dicho tema. Para ello, podrás basarte en tus conocimientos, reflexiones y experiencias. En algunos casos, el ensayo estará enfocado a presentar tu punto de vista para la explicación y resolución de un problema. Elaborar ensayos en tus estudios te permitirá fortalecer tu capacidad crítica con bases fundamentadas.

Para realizarlo debes:

- Elegir un contenido (tema).
- Identificar la postura del autor o autores.
- Determinar tu postura. Para ello, requieres buscar información relacionada con el tema en libros, revistas, periódicos, sitios web, etc. Y citar por lo menos una fuente de consulta.
- Estructurar tu ensayo considerando lo siguiente: introducción, desarrollo de tu argumento y conclusión del tema.

Ejemplo:

EL HOMBRE QUE ESPERA MILAGROS
Mario Benedetti

Criticando a los críticos

En cierto modo es comprensible que para algunos lectores y numerosos autores, el crítico literario o de arte resulte una suerte de ogro en ejercicio, poseedor de una glándula intelectual que segrega venenos en dosis máximas y mínimas.

Hace un siglo escribió Disraelí: "¿sabéis quiénes son los críticos? Hombres que fracasaron en la literatura y en las artes". "Todo crítico es un fracasado", reza más escuetamente una de esas tantas ideas recibidas que representan la máxima sabiduría para algunas personas; entre ellas para los fracasados que no ejercen la crítica.

El derecho al error

Es verdad que en ciertas ocasiones el crítico es un fracasado, o por lo menos un escritor que alguna vez tuvo suficiente autoexigencia como para darse cuenta de que la novela o la oda que tenía escondidas en la última gaveta de su mesa, sencillamente no valían la gloria, pero sobre todo no valían la pena. Quien piensa que todo crítico es un fracasado, le está negando al crítico personería intelectual, y eso es un erróneo trasplante de culpas.

Reconozcamos que el crítico es, en algunos casos, un ser exasperado y con bastante más frecuencia, un ser exasperante. Aun la verdad lisa y llana tiene un alto poder de irritación; cuánto más no habrán de tenerlos ciertos vicios de la profesión tales como la lectura distraída, el consejo presuntuoso, la ironía brillante pero injusta. El mal crítico tiene diversos modos de ocultar sus carencias. Lo peligroso es, sin embargo, cuando existe un mal crítico dentro del bueno.

En este sentido, la amistad constituye a veces la palabra clave. Hay críticos que, por el solo hecho de referirse al libro de un amigo se sienten obligados a elogiarlo sin medida; pero hay otros, en cambio, que se sienten obligados a vapulearlo con especial vigor, a fin de que nadie se atreva a pensar que la amistad ha pesado en el juicio...

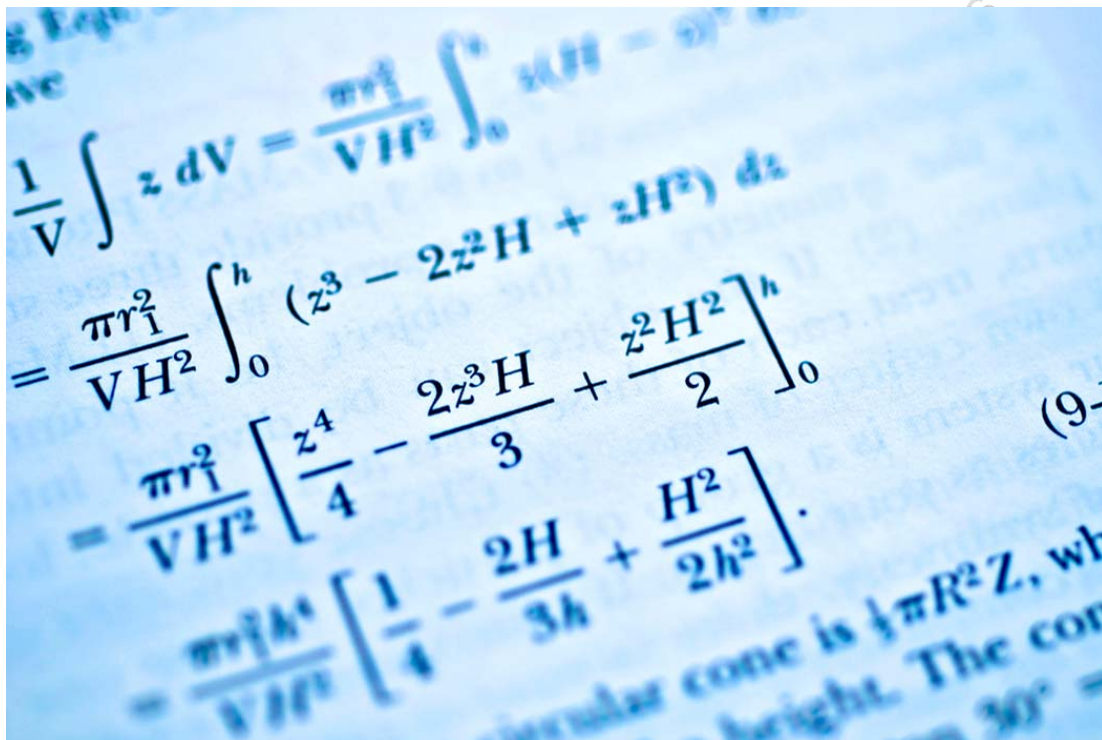
Tomado del: diario EXPRESO, edición del 2 de agosto de 1975 - Lima, Perú.

Finalmente, te recomendamos que construyas un **archivo** o **portafolio** con todas y cada una de las estrategias que elabores durante el estudio de tu Libro para el Aprendizaje y te sirvan de acervo de consulta personal para preparar tus trabajos escolares o tus exámenes.

Es importante que si tienes alguna duda sobre cómo utilizar estas estrategias durante el estudio de tu asignatura, consultes a tu orientador, tutor o asesor.

BLOQUE TEMÁTICO UNO

FUNDAMENTOS: ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS


$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int z dV &= \frac{\pi r_1^2}{V H^2} \int_0^H (z^3 - 2z^2 H + z H^2) dz \\ &= \frac{\pi r_1^2}{V H^2} \int_0^H (z^3 - 2z^2 H + z H^2) dz \\ &= \frac{\pi r_1^2}{V H^2} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3 H}{3} + \frac{z^2 H^2}{2} \right]_0^H \\ &= \frac{\pi r_1^2 H^4}{V H^2} \left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3H} + \frac{H^2}{2H^2} \right]. \end{aligned}$$

Autor: María Patricia Rodríguez Hernández

Asesor Pedagógico: Luz María García Muñoz

BLOQUE TEMÁTICO UNO FUNDAMENTOS: ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS

PROPÓSITO

1. Números reales
 - 1.1. Operaciones con números reales
 - Actividad de Aprendizaje 1**
 - Actividad de Aprendizaje 2**
 - 1.2. Operaciones con números racionales
 - Actividad de Aprendizaje 3**
 - Actividad de Aprendizaje 4**

Resumen

2. Razones y proporciones
 - 2.1. Concepto de razón y proporción
 - 2.2. Proporción directa
 - Actividad de Aprendizaje 5**
 - Actividad de Aprendizaje 6**
 - 2.3. Proporción inversa
 - Actividad de Aprendizaje 7**

Resumen

3. Series y sucesiones
 - 3.1. Serie aritmética
 - 3.2. La suma de los “n” primeros términos de una serie aritmética
 - Actividad de Aprendizaje 8**
 - Actividad de Aprendizaje 9**

Resumen

4. Notación científica
 - Actividad de Aprendizaje 10**

5. Leyes de los exponentes

5.1. Exponentes enteros

Actividad de Aprendizaje 11

5.2. Exponentes fraccionarios

Actividad de Aprendizaje 12

Resumen

RECAPITULACIÓN

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

AUTOEVALUACIÓN

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

PROPÓSITO

¿Qué vas a lograr?

Argumentarás de forma adecuada la solución de diversas problemáticas situadas, expresando ideas y conceptos, aplicando el lenguaje matemático y verbal, así como el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

¿Qué conocimientos desarrollarás?

Construir e interpretar la solución de problemas aritméticos y algebraicos, variacionales y gráficos

¿Cómo lo realizarás?

A través de la solución de problemas donde utilices operaciones fundamentales con números reales, la notación científica, razones, proporciones y leyes de los exponentes.

¿Para qué te va a servir?

Para explicar la solución de diferentes problemáticas que se presenten en tu vida cotidiana y en otras disciplinas con la finalidad de mejorar tus habilidades de abstracción y razonamiento lógico.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

BLOQUE TEMÁTICO UNO

FUNDAMENTOS: ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS.

Los contenidos de este bloque se abordarán desde cuatro problemáticas situadas:

- La gran fiesta
- El viaje
- La pirámide de Arturo
- El virus de la influenza

Antes de iniciar con la resolución de la primera problemática revisemos las propiedades generales de los números reales.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

1. NÚMEROS REALES

Para que puedas iniciar el estudio de este núcleo temático deberás conocer o recordar algunas de las propiedades de campo de los números reales.

Propiedades de campo de los números reales.

Para estudiar cualquier rama del conocimiento requieres manejar el lenguaje técnico que le es propio, o por lo menos los elementos básicos.

Para la introducción formal al estudio de los números reales, se parte del conocimiento que tengas de las operaciones binarias de adición y multiplicación, por las cuales a cada pareja de números reales se les asocia un algoritmo llamado suma (+) y producto (x) respectivamente; y que además estar familiarizado con el uso del símbolo igual (=). Estos conceptos que se aceptan sin definir, del lenguaje de la lógica y las palabras de nuestro idioma usadas comúnmente, constituyen el lenguaje básico de los **números reales (R)**.

Los siguientes axiomas, que te presentamos a continuación, son los que más utilizaras para desarrollar la problemática.

Axiomas de la adición.

- *Asociatividad:* Para tres números diferentes a, b y c que pertenecen a los reales $(a+b)+c = a+(b+c)$ (esto quiere decir que no importa como se asocien tres números reales para realizar la suma, el resultado es el mismo).

Ejemplo:

$3+(4+5)=(3+4)+5$, sumado primero los términos que están agrupados en paréntesis queda:

$$3+9 = 7 + 5$$

$$12 = 12$$

- *Conmutatividad:* Para todo número a, b y c que pertenecen a los Reales $a+b = b+a$ (el orden de los sumandos no altera la suma).

Ejemplo:

$$3+2=2+3$$

$$5 = 5$$

Axiomas de la multiplicación.

- *Asociatividad:* Para todo a, b y c en R, $(ab)c = a(bc)$, (si asociamos de diferente manera para multiplicar tres o más números el resultado es el mismo).

Ejemplo:

$((3)(5))(7) = (3)((5)(7))$, efectuando la operación

$$(15)(7) = (3)(35)$$

$$105 = 105$$

Conmutatividad: Para todo número a y b en R , $ab = ba$ (el orden de los factores no altera el producto).

Ejemplo:

$$(3)(4) = (4)(3).$$

Axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la adición.

Para todo a , b y c en R , $a(b+c) = ab + ac$ y $(b+c)a = ba + ca$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad 3(2+5) &= (3)(2)+(3)(5) \\ &= 6 + 15 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (2+5)3 &= (2)(3) + (5)(3) \\ &= 6 + 15 \\ &= 21. \end{aligned}$$

1.1. Operaciones con números reales

En la Prehistoria, la aritmética se limitó al uso de números enteros encontrados, inscritos en objetos que indican una clara concepción de la suma y resta; el más conocido es el **hueso Ishango** de África central, que data entre 1800 y 2000 a. C.

La **aritmética** es la más antigua y elemental rama de la matemática, utilizada en casi todo el mundo, en tareas cotidianas que involucran el proceso de contar y en los más avanzados cálculos científicos, su objetivo principal son las operaciones con los números y sus propiedades elementales. Esta palabra proviene de “ἀριθμητικός”, término de origen griego; *arithmos* αριθμός que quieren decir número y *techne* habilidad.

A través de la siguiente **problemática situada** estudiarás las propiedades básicas con números reales y las operaciones entre ellos.

La gran fiesta.

En el grupo de yoga de la Colonia Ajusco se está organizando una reunión a la que asistirán la mayoría del grupo; el motivo es el cumpleaños de mi amigo José. Él es el encargado de hacer las compras, ya que la fiesta será en su casa. Compró 5 pizzas de \$130.00 c/u, 12 refrescos de \$15.00 c/u, 3 paquetes de vasos de \$8.00 c/u, 4 paquetes de platos de \$12.00 c/u y \$159.00 en diversos artículos. Del dinero que logramos reunir José contaba con \$1,358.00, y de lo que le sobre quiere comprar un pastel que cuesta \$375.00.

José practica yoga los sábados, y terminando de entrenar nos vamos a ir a su casa para festejar su cumpleaños, en el grupo somos 22, pero solo iremos 15 compañeros a la reunión.

José se retiraría un poco antes de terminar de entrenar para hacer las compras, y nosotros estaríamos en su casa a las 18 horas del mismo sábado, para terminar la reunión a las 23 horas del mismo día. El festejado necesitará hacer algunas operaciones con números enteros para ir haciendo cuentas de lo que gasta y de lo que le sobra; las operaciones aritméticas como son sumar, restar, multiplicar y dividir le servirán para dar solución a sus planteamientos.

José tiene la siguiente duda: ¿si le alcanzará para comprar el pastel después de realizar las compras y cuanto dinero le sobrará?

Puedes efectuar algunas operaciones para saber cuanto dinero lleva gastado José.

Para realizar operaciones con números enteros necesitas conocer las **reglas de los signos**, técnicas para efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Suma

Te presentamos las reglas de los signos para sumar y restar enteros:

1) Cuando se suman dos números (o más) positivos, el resultado es otro número positivo.

Ejemplos:

$$3+7 = 10$$

$$7+3 = 10$$

Recuerda que la suma cumple con la propiedad conmutativa $3+7 = 7+3$. Esta propiedad nos dice: El orden de los sumandos no altera la suma.

2) Cuando se suman dos números (o más) negativos el resultado es otro número negativo.

Ejemplo:

$$-3 - 7 = -10$$

3) Cuando se suman dos números con signos contrarios, se restan sus valores absolutos, y el resultado lleva el signo del número mayor.

Ejemplos:

$-3+7 = 4$ (porque a 7 le restamos 3 y el número mayor es positivo por lo tanto el resultado es positivo).

$-7+3 = -4$ (porque a 7 le restamos 3 y el resultado lleva el signo del número mayor que en este caso es negativo).

¿Qué es un valor absoluto?

El valor absoluto (se representa con unas barras verticales), de cualquier número real “y”, siempre es positivo.

Ejemplos:

$$|4| = 4$$

$$|-4| = 4$$

$$|0| = 0$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

Realiza las siguientes operaciones, para reforzar lo que acabamos de revisar

a) $-3+5-7+8 =$

b) $-5-6-1 =$

c) $10-7+4=$

d) $2+4 =$

e) $2+8+6 =$

f) $-3+2-1+2 =$

¿Qué otras operaciones necesita hacer José?

Multiplicación.

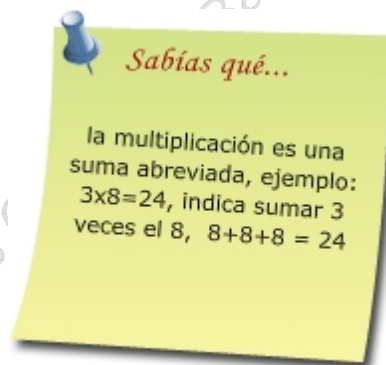
Para realizar operaciones de multiplicación con números enteros debemos tener presente las leyes de los signos para multiplicar, estas se presentan en la siguiente tabla:

(+) (+) = +
(-) (-) = +
(+) (-) = -
(-) (+) = -

Esto quiere decir que signos iguales cuando se multiplican son positivos y signos diferentes será negativo.

Enlistemos lo que compró José:

- 1) 5 pizzas de \$130.00 c/u.
- 2) 12 refrescos de \$15.00 c/u.
- 3) 3 paquetes de vasos de \$ 8.00 c/u.
- 4) 4 paquetes de platos de \$ 12.00 c/u.
- 5) \$159.00 en diversos artículos.



Debemos **multiplicar** el número de artículos que compró por el precio de cada uno de ellos.

$$(5)(130) = 650$$

$$(12)(15) = 180$$

$$(3)(8) = 24$$

$$(4)(12) = 48$$

Ya que tenemos la cantidad total de cada producto, para poder encontrar el total de gastos que lleva José, realizamos una suma.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para saber la cantidad total que se lleva gastado, José necesita sumar enteros, en este caso te presentamos la suma de enteros positivos y negativos, porque generalmente en la vida cotidiana también se presentan pérdidas que corresponden a los números enteros negativos.

- a) 3
- b) -12
- c) 7
- d) 6
- e) 16
- f) 0

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2

Para apoyar a José te solicitamos que anotes en tu cuaderno y completes la siguiente tabla:

Producto	Precio total
Pizzas	
Refrescos	
Paquetes de vasos	
Paquetes de platos	
Diversos artículos	
Total gastado.	

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para realizar esta actividad, José necesita conocer el precio total de cada producto y esto se logra multiplicando el precio de una unidad por el número total de unidades. En la tabla que se presenta aparece el precio total dependiendo cuantas pizzas, cuantos refrescos, cuantos paquetes de vasos, cuantos paquetes de platos compraron.

Producto	Precio total
Pizzas	\$ 650.00
Refrescos	\$180.00
Paquetes de vasos	\$24.00
Paquetes de platos	\$48.00
Diversos artículos	\$159.00
Total gastado.	\$1061.00

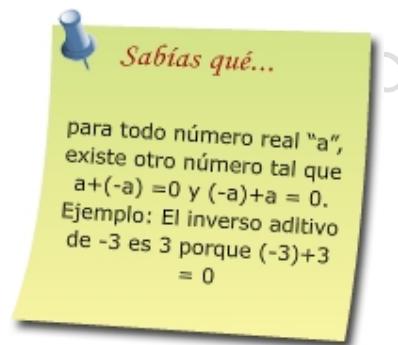
1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

Debemos saber cuánto dinero le queda a José después de realizar sus compras, porque todavía le falta comprar el pastel y queremos saber cuánto dinero más tendremos que poner.

Resta

Para realizar la operación que debe hacer José, necesitamos realizar una resta, pero ¿Qué es una resta?

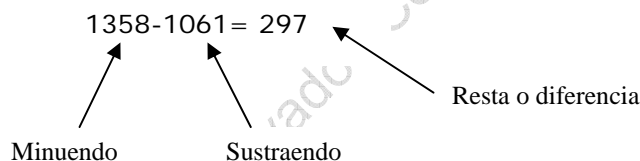
Una resta es lo que llamamos sustracción. La sustracción de números enteros, es decir la diferencia de dos enteros es un caso particular de la adición, restar un número es sumar el inverso aditivo del otro número.



Ejemplo:

$13 - 4 = 9$, esto también se puede representar como: $13 + (-4) = 9$
La sustracción es la operación inversa de la adición.

Las partes que componen una resta son las siguientes:



Solo quedan \$297.00, por lo tanto NO le alcanza para comprar el pastel. ¿Cuánto le falta?, ¿Qué operación realizamos?

Realizamos una resta, es decir, el precio del pastel que es de \$375.00 menos la cantidad que le queda \$297.00 es igual a la cantidad que le falta para comprar dicho pastel, esto es:

Completa los espacios, realizando la operación, para saber cuánto dinero le falta a José.

$$\begin{array}{ccc} \text{Lo que se junto} & & \text{Total gastado} & & \text{Dinero que sobra} \\ \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{} \end{array}$$

Por lo tanto le faltan \$78.00 a José para comprar el pastel.

Como era el cumpleaños de José, hicimos una cooperación entre todos para comprar el pastel. Uno de nosotros grito, diciendo: "somos 15 personas, ¿Con cuánto tenemos que cooperar cada uno, si el pastel cuesta \$375.00?".

División

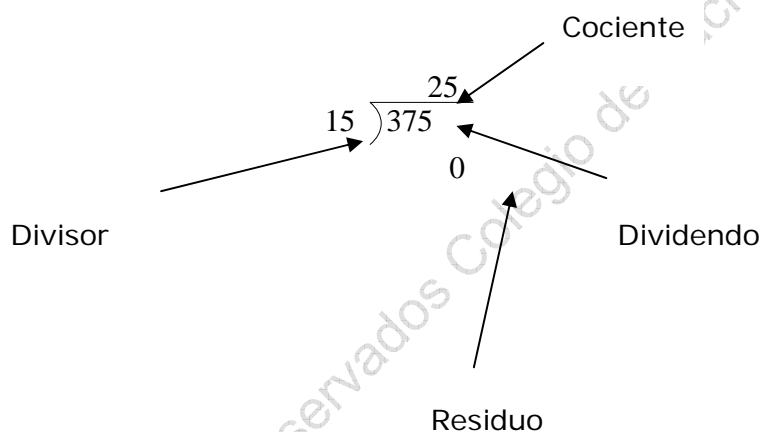
Podemos efectuar una división, pero ¿Cómo se resuelven las divisiones?
División de números enteros.

Teniendo los números enteros **a** y **b** ($b \neq 0$), la división de **a** entre **b** se denota por $\frac{a}{b}$; o como $b\overline{)a}$

La división es la operación inversa de la multiplicación.

Conociendo el dividendo y el divisor, se debe encontrar el otro factor "cociente". El producto del cociente por el divisor más el residuo es, por tanto, igual al dividendo.

Elementos que componen una división:



Por lo que cada uno debe cooperar con \$15.00 más para comprar el pastel.

1.2. Operaciones con números racionales

Un número racional es todo aquel que se representa como la relación por cociente entre dos números enteros denominado comúnmente fracción

El concepto matemático de fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales, como cuando hablamos, por ejemplo, de un cuarto de hora, de la mitad de un pastel.

Una fracción se representa matemáticamente por números que están escritos uno sobre otro y que se hallan separados por una línea recta horizontal llamada raya fraccionaria.

La fracción está formada por dos términos: el numerador y el denominador.

TÉRMINOS DE UNA FRACCIÓN

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \text{numerador} \\ \hline \text{denominador} \end{array}$$

Los valores de **a** y **b** deben ser enteros y “b” que es el denominador será siempre diferente de cero.

El “numerador”, indica el número de partes iguales que se han tomado o considerado de un entero. El “denominador”, indica el número de partes iguales en que se ha dividido un entero.

Tres cuartos de hora no son, evidentemente, la misma cosa que las tres cuartas partes de un pastel, pero se “calculan” de la misma manera: dividiendo la totalidad (una hora, o el pastel) en cuatro partes iguales y tomando luego tres de esas partes. Por esta razón, en ambos casos, se habla de dividir dicha unidad (una hora, un pastel, etc.) en 4 partes iguales y tomar luego 3 de dichas partes.

Ejemplo:

Hay 8 partes de las cuales se han pintado 5, por lo tanto, la fracción iluminada que representa matemáticamente este dibujo es $\frac{5}{8}$ (se lee cinco octavos).



Las operaciones con números racionales te permiten obtener los resultados de una gran cantidad de cuestiones prácticas como son: el peso de una o varias personas, cortar una lámina en partes iguales, llenar cierto número de botellas con una cantidad de líquido, y muchas más que se presentan en la vida cotidiana, no podemos prescindir de estas operaciones ya que generalmente las cuestiones prácticas se presentan con números racionales.

Continúa ayudando a José:

El costo del pastel es de \$375.00, que dividido entre 15 personas lo representamos como $\frac{375}{15}$.

Observa que tanto el numerador 375 como el denominador 15, son múltiplos de 5, entonces 375 lo podemos representar como $5(75) = 375$ y el 15 lo representamos como $5(3)$.

Tenemos que un número entero “A es múltiplo de B”, cuando existe otro número natural que multiplicado por B nos da como resultado el número A.

Ejemplo:

6 es múltiplo de 2 y de 3 porque $(2)(3) = 6$.

José dividió 375 entre 15, otra forma de dar solución a lo anterior es la siguiente:

Los números 375 y 15 los podemos descomponer en sus factores primos:
¿Quiénes son los números primos?

Definamos.

Números primo:

Es aquel que solo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Los primeros 8 números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Descomponer 375 en sus factores primos:

375	5
75	5
15	5
3	3
1	

Descomponer 15 en sus factores primos:

15	3
5	5
1	

Por lo tanto, la expresión $\frac{375}{15} = \frac{(5)(5)(5)(3)}{(3)(5)}$, cancelando factores iguales, se tiene el siguiente resultado:

$$\frac{\cancel{(5)}(5)(5)(\cancel{3})}{(\cancel{3})(\cancel{5})} = 25.$$

Entonces debemos de cooperar con \$25.00 cada uno para comprarle el pastel al festejado.

Observamos que realizando la división o descomponiendo en sus factores primos cada parte de la fracción y reduciendo se obtiene el mismo resultado.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 3

Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno, para reforzar lo que acabas de aprender.

1.-Descomponer en sus factores primos y simplificar las fracciones indicadas.

a) $\frac{12}{30} =$

b) $\frac{36}{120} =$

c) $\frac{350}{50} =$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

La descomposición en factores primos, es otra alternativa cuando necesitas conocer el resultado de efectuar una división, esto también lo puedes obtener simplificando fracciones.

Descomponer en sus factores primos y simplificar las fracciones indicadas.

$$\text{a) } \frac{12}{30} = \frac{3 \times 2 \times 2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 3 \times 5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{b) } \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$\text{c) } \frac{350}{50} = 7$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

Finalmente nos despedimos del festejado, no sin antes darle su respectivo regalo y probar una buena rebanada de pastel.

Suma

La suma de dos fracciones o más tiene diversas aplicaciones en la vida cotidiana, cuando deseamos aumentar, añadir, incrementar, necesitamos realizar una adición o suma. Para sumar fracciones estas deben tener el mismo denominador, o bien obtenerlo para después realizar operaciones con ellas.

A José, le gusta mucho el pastel y desea saber que porción le quedó y cuanto repartió.

Del total del pastel primero repartió $\frac{2}{5}$, después $\frac{1}{8}$ y finalmente $\frac{1}{3}$, ¿Cuánto pastel le quedo a tú amigo? Necesitamos sumar lo que repartió.

Sumar fracciones con distinto denominador. En general, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos racionales, la suma es el número racional $\frac{ad+bc}{bd}$.

Entonces procedamos a sumar primero:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \frac{16+5}{40} = \frac{21}{40} \text{ y este resultado sumarlo con } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{21}{40} + \frac{1}{3} = \frac{63+40}{120} = \frac{103}{120}$$

Que sucede cuando se tiene igual denominador, observa el siguiente recuadro.

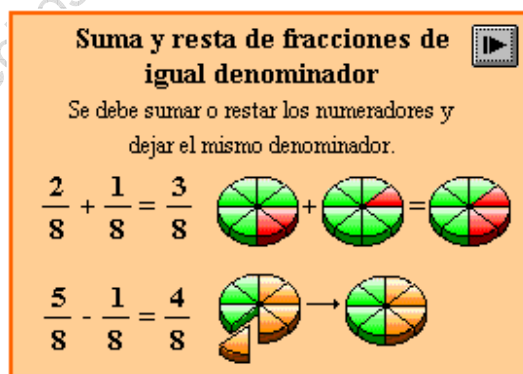


Figura 1. Suma y resta de fracciones

José repartió un total de $\frac{103}{120}$ del pastel. Y para conocer la proporción que le quedo debemos hacer una resta.

Resta

La resta o sustracción tiene múltiples aplicaciones en la vida cotidiana, cuando se trata de disminuir, obtener la diferencia o perder se utiliza esta operación. La resta es una suma abreviada, por lo tanto, se debe seguir el mismo procedimiento y se procede como en el caso anterior.

El pastel completo representa un entero del cual se tomó $\frac{103}{120}$.

Operaciones:

$$1 - \frac{103}{120} = \frac{1}{1} - \frac{103}{120} = \frac{120 - 103}{120} = \frac{17}{120}$$

Transforma este número a decimal, para esto debes efectuar la división indicada:

$$\begin{array}{r} 0.143 \\ 120 \overline{) 17} \\ \underline{500} \\ 400 \\ \underline{40} \end{array}$$

La fracción $\frac{17}{120} = 0.143$, siendo la cantidad de pastel que le quedó.

División de números racionales.

Al final llegaron dos amigos más y decidió repartir lo que le quedaba de pastel en dos partes iguales, ¿Cuánto le tocó a cada uno? ¿Qué operación debes realizar?. Debes realizar una división de fracciones.

$$\frac{17}{120} \div 2 =$$

Para efectuar la división, multiplica la primera fracción por el **recíproco** de la segunda fracción:

$$\left(\frac{17}{120}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{240}$$

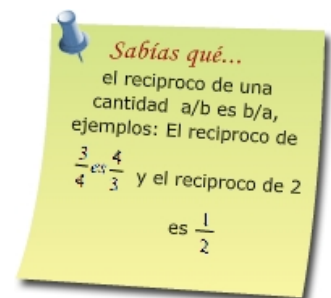
Realizando la división tenemos que $17 \div 240 = 0.07$, que es la cantidad que le tocó a cada uno.

Al siguiente día, José recoge todo lo que sobró de la fiesta, y observa que:

De 3 paquetes de vasos que compró, sobró lo siguiente:

Del primer paquete $\frac{1}{10}$

Del segundo paquete $\frac{1}{5}$



Del tercer paquete $\frac{1}{2}$

Si cada paquete contiene 50 vasos, ¿Cuántos vasos se usaron y cuántos sobraron?

Multiplicación de números racionales.

Debes efectuar una multiplicación de fracciones, ¿Sabes multiplicar fracciones?

La multiplicación o producto de dos fracciones es otra fracción, cuyo numerador y denominador es el producto de los numeradores y de los denominadores respectivamente.

Ejemplo:

$$1) \frac{7}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{8 \times 4} = \frac{21}{32}$$

2) $4 \times \frac{3}{4} =$, se efectúa de la siguiente manera, representando el número entero en forma fraccionaria:

$$\frac{4}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Calculemos $\frac{1}{10}$ de 50, $\frac{1}{5}$ de 50 y $\frac{1}{2}$ de 50.

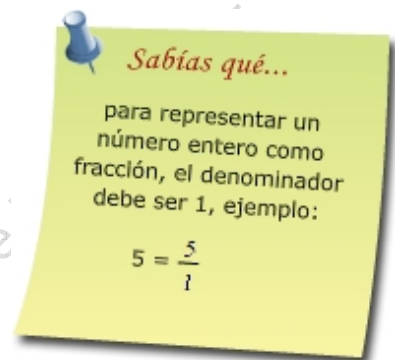
Efectuando las multiplicaciones:

$$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{50}{1}\right) = \frac{50}{10} = 5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{50}{1}\right) = \frac{50}{5} = 10$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{50}{1}\right) = \frac{50}{2} = 25$$

Entonces del primer paquete sobraron 5, del segundo 10 y del tercero 25. Efectuando una suma, José tiene $5+10+25 = 40$ vasos, que sobraron y se consumieron $150-40 = 110$ vasos.



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 4

1. Realiza las siguientes operaciones para reforzar lo que aprendiste.

a) $\left(\frac{5}{6}\right)(10) =$

b) $3\left(\frac{7}{8}\right) =$

c) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right)\frac{4}{3} =$

2. Resuelve el siguiente problema, si tienes dificultad, puedes volver a revisar los contenidos anteriores.

En la “gran fiesta”, recordarás que nuestro amigo José hace un recuento de todo lo que le sobró de los artículos desechables, de los cuales 40 vasos, ahora también desea hacer el recuento de los platos que le restan. ¿Podrás hacerlo tú? De los cuatro paquetes de platos que compró, le sobró lo siguiente:

Del primer paquete $\frac{1}{4}$

Del segundo paquete $\frac{1}{2}$

Del tercer paquete $\frac{2}{5}$

Del cuarto paquete $\frac{1}{5}$

a) ¿Cuántos platos gastaron y cuantos le sobraron?, si cada paquete tenía 40 platos.

b) Nuestro amigo, desea repartir los platos que le sobraron entre 3 niños que son sus vecinos. ¿Cuántos platos le puede repartir a cada uno para que les toque por partes iguales?

c) ¿Al hacer la repartición, le sobran platos? ¿Cuántos?

d) Después decide no hacer la repartición por partes iguales desea repartirlos a sus 3 amiguitos, llamados Juan, Ernesto y Paco, pero ahora desea hacerlo de la siguiente manera: A Juan desea darle **el triple** de lo que le toque a Ernesto, y a Ernesto desea darle la mitad de lo que le toque a Paco, y a Paco desea darle 10 platos ¿Cuántos platos deberá darles a Juan y a Ernesto?

e) ¿Al hacer la repartición de platos, cuantos platos le sobran a José?

¿Quieres conocer más?

Consulta el siguiente libro: Pulido Chiunti, Antonio (2009). Matemáticas 1, "Apegado a la reforma integral de la educación media superior basada en competencias". Ed. Nueva Imagen, México,. Pp. 16-28.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para poder obtener una porción de un total efectuamos multiplicación de fracciones, esta aplicación es la que utiliza José para conocer la cantidad de vasos que sobraron.

1. Efectuar las siguientes multiplicaciones con fracciones.

$$a) \left(\frac{5}{6}\right)10 = \frac{50}{6}$$

$$b) 3\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{21}{8}$$

$$c) \left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right)\frac{4}{3} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{24}$$

2. En la presente problemática, José vuelve a hacer sumas y restas de enteros, así como operaciones con fracciones que son muy útiles para oficios como carpintería, diseñador de trajes o vestidos y en el campo científico y tecnológico.

Solución al problema:

A continuación te mostramos el desarrollo a seguir para dar respuesta a las preguntas que se planteo José.

¿Cuántos platos gastaron y cuantos le sobraron?, si cada paquete tenía 40 platos.

Del primer paquete le sobró $\frac{1}{4}$

Por lo tanto debemos calcular $\frac{1}{4}$ de 40.

$$\left(\frac{1}{4}\right)(40) = \frac{40}{4} = 10$$

Del segundo paquete $\frac{1}{2}$

Entonces debemos encontrar $\frac{1}{2}$ de 40.

$$\left(\frac{1}{2}\right)(40) = \frac{40}{2} = 20$$

Para el tercer paquete $\frac{2}{5}$ de 40.

Se tiene: $\left(\frac{2}{5}\right)(40) = \frac{80}{5} = 16$

Para el cuarto paquete $\frac{1}{5}$ de 40.

$$\frac{1}{5} \times 40 = \frac{1}{5} \times \frac{40}{1} = \frac{40}{5} = 8$$

Ahora estamos en condiciones de contestar la primera pregunta: ¿Cuántos platos gastaron y cuantos le sobraron? Las cantidades que obtuvimos, son los platos que le sobraron por paquete, entonces se tiene:

$10+20+16+8=54$ platos que sobraron, para sacar el total de los que gasto, procedemos a sacar el total de platos, si tiene 4 paquetes de 40 cada uno, realizamos una multiplicación:

$$4 \times 40 = 160$$

Si sobraron 54 platos, entonces: $160 - 54 = 106$ es la cantidad que se consumió durante la fiesta.

Si estos platos que le sobraron los reparte entre 3 niños, por partes iguales. Debemos hacer una división entre 3, se tiene que:

$\frac{54}{3}$, el numerador se puede descomponer en sus factores primos

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

La fracción anterior quedaría así:

$$\frac{54}{3} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 3}{3} = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

Si nuestro amigo José hace la repartición por partes iguales, le daría a cada niño 18 platos y no le sobraría nada.

Porque $18 \times 3 = 54$.

Ahora veamos la nueva repartición que desea hacer José:

A Paco 10 platos a Ernesto la mitad de lo que le toque a Paco, por lo tanto la mitad de 10 será de 5, a Juan el triple de lo que le toque a Ernesto.

Como a Ernesto le tocaron 5 platos y a Juan desea darle el triple de lo que le toco a Ernesto, entonces se tiene que $5 \times 3 = 15$.

A Paco le dio 10 platos.

A Ernesto le toco 5 y a Paco 15, el total de platos que repartió fue de:

$$10+5+15 = 30$$

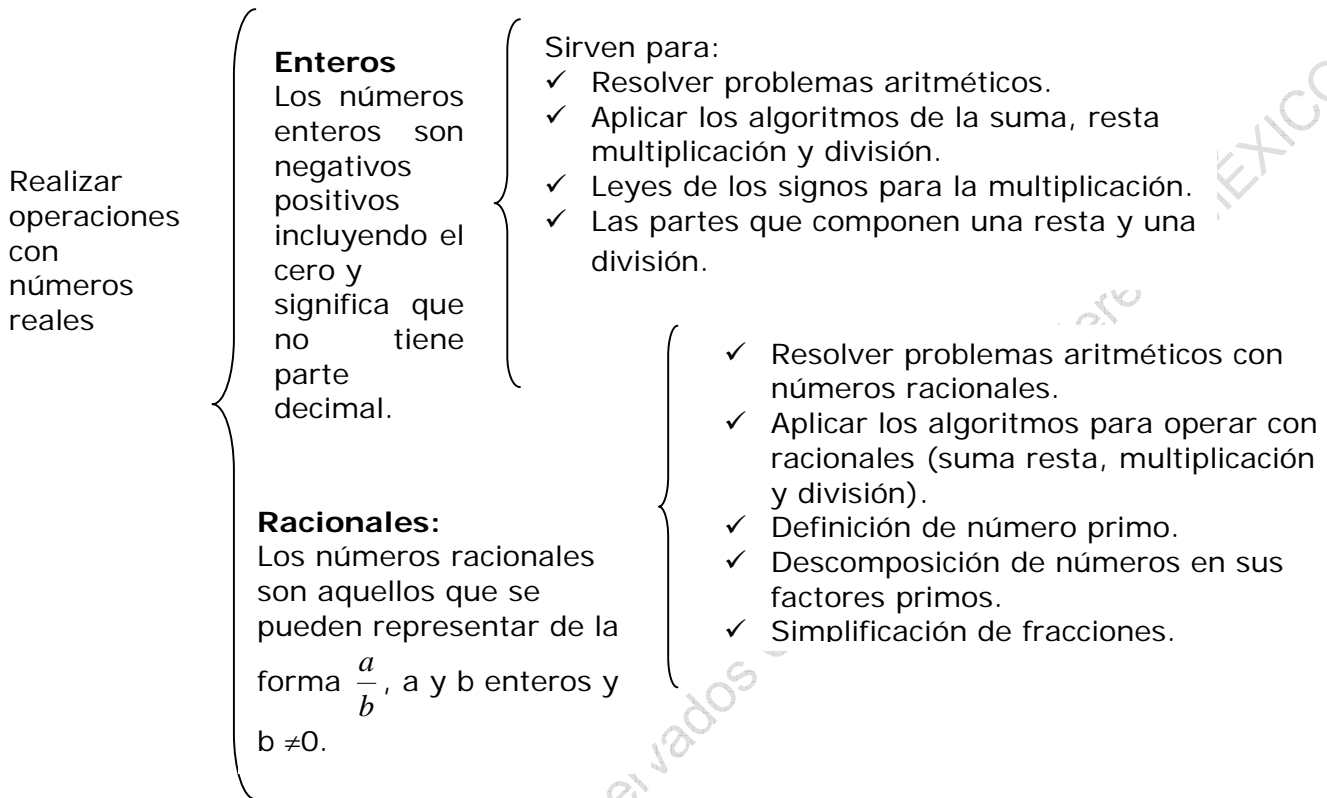
Y como le sobraron 54 platos realizamos una resta para saber con cuantos platos se quedo José

$$54-30 = 24 \text{ platos.}$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

RESUMEN

En este núcleo temático aprendiste a través de problemáticas situadas a:



En la antigüedad el hombre tuvo la necesidad de contar, de medir y ahora en la actualidad el ser humano tiene la capacidad de resolver problemas más complejos que se le presentan en su vida cotidiana y en el trabajo. Algunas personas trabajan como encargado de tiendas de comida rápida, y al efectuar el cierre de caja se deben aplicar algunas operaciones con números racionales para comprobar que el importe corresponde al total vendido en un día.

Las operaciones con números racionales son las que más utilidades tienen, porque el entorno que nos rodea, científico, tecnológico, nuestra vida cotidiana siempre presentará casos de medición, repartición y recorte que no son exactos.

Te felicito por haber terminado con éxito este primer núcleo temático y te invito a seguir revisando los siguientes núcleos.

2. RAZONES Y PROPORCIONES

Para iniciar con el estudio de razones y proporciones a través de problemáticas situadas, necesitas conocer la propiedad que deben cumplir dos fracciones que sean equivalentes.

Fracciones equivalentes:

Las fracciones equivalentes son aquellas que tienen el mismo valor o representan la misma parte de un objeto.

Una forma de comprobar si dos fracciones son equivalentes, es de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Se realiza una multiplicación de los términos que son los extremos 2 y 12; así como los medios de la igualdad que son 3 y 8 por lo tanto:

$$(2)(12)=(3)(8)$$

Como puedes observar se cumple una igualdad $24=24$, por lo tanto las dos fracciones son equivalentes.

El viaje.

La familia Sánchez planea salir de vacaciones en el mes de mayo con motivo de las utilidades que recibe el señor Sánchez en la empresa donde labora, partiendo del Zócalo (D. F.), donde primero pasaron a hacer algunas compras, hacia Acayucan (Veracruz), por lo que el recorrido que harán será de 538 Km aproximadamente.

En el mes de mayo, el padre de familia, siempre pide una semana de vacaciones, por lo tanto el viaje lo iniciarán el sábado por la noche para estar de regreso el domingo de la próxima semana por la tarde.

El Sr. Sánchez para en una gasolinera y pide le llenen el tanque de su camioneta, paga \$ 306.0, el litro de gasolina cuesta \$ 6.80, cada litro da un rendimiento de 12 kilómetros.

¿Cuántos litros depositaron al tanque y cuantos le quedaran cuando ha realizado un recorrido 230 kilómetros?

2.1. Concepto de razón y proporción.

Necesitas conocer el concepto de razón para saber cuantos litros depositaron en el tanque de gasolina, ya que esto depende de lo que pago el Sr. Sánchez.

Concepto de razón.

La comparación por cociente entre dos números recibe el nombre de razón.

Si a y b son dos números ($b \neq 0$), la razón entre el par ordenado de números a , b es el cociente $\frac{a}{b}$ que se lee “ a es a b ”. El número a recibe el nombre de antecedente y el número b se llama consecuente.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

Debemos plantear la razón entre la cantidad que se pago y el costo por litro:

$$\frac{306 \text{ pesos}}{6.80 \text{ litros}}$$

Realiza la división.

La cantidad de litros que compró es de:

_____ litros

Ya conoces lo que es una razón, pero también necesitas saber lo que es una proporción, para que el Sr. Sánchez pueda saber cuantos litros le quedaran al tanque cuando ha recorrido 230 kilómetros.

¿Qué es una proporción?

Una proporción es una igualdad entre dos razones:

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}, \text{ es una proporción.}$$

Para comprobar que se cumple la proporción, se procede de la siguiente manera: Las cantidades 2, 3, 6 y 9 se llaman términos de la proporción. El primero y el cuarto, es decir 2 y 9 son los extremos, el segundo y el tercero son en este caso los números 3 y 6 son llamados medios de la proporción.

La propiedad fundamental de las proporciones establece que:

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Por lo tanto: $(2)(9) = (3)(6)$, se cumple la proporción porque el producto de los extremos es igual al producto de los medios $18 = 18$.

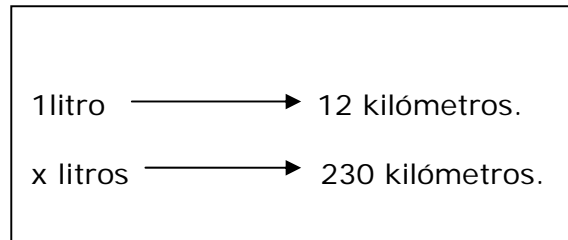
De manera generalizada quedaría así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } ad = bc.$$

Para obtener el valor de un término desconocido en una proporción, se aplica la propiedad anterior y se efectúan las operaciones necesarias.

Debemos saber: ¿cuántos litros le quedarán al tanque cuando ha recorrido 230 kilómetros?

Analizando:



Sabemos que un litro rinde 12 kilómetros, por lo tanto establecemos la proporción:

$$\frac{1}{x} = \frac{12}{230}$$

2.2. Proporción directa

El problema anterior recibe el nombre de proporción directa:

Concepto:

Dadas dos cantidades, si a un aumento de una corresponde un aumento para la otra, o a una disminución de una corresponde una disminución de la otra, se dice que tales cantidades son directamente proporcionales.

Ejemplos de cantidades directamente proporcionales:

- 1) La distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla, cuando la velocidad es constante.
- 2) El lado de un polígono regular y su perímetro.
- 3) El interés que produce el dinero ahorrado en un banco y la cantidad de dinero depositada.

En el problema anterior, si el número de kilómetros aumenta debemos de gastar más litros de gasolina en este caso ambas cantidades aumentan; por lo tanto tenemos un ejemplo de proporción directa.

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones, se tiene que:

$$\frac{1}{x} = \frac{12}{230}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 12x &= (1)(230) \\ x &= \frac{230}{12} \\ x &= 19.1\overline{6} \text{ litros} \end{aligned}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 5

Trabaja colaborativamente o de forma individual y realiza el siguiente ejercicio.

1.-Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

1) $\frac{x}{9} = \frac{10}{15}$

2) $\frac{4}{6} = \frac{6}{x}$

3) $\frac{50}{x} = \frac{x}{2}$

4) $\frac{x}{2.6} = \frac{3.5}{x}$

5) $\frac{14}{21} = \frac{x}{15}$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

En una proporción siempre será necesario calcular un dato faltante, estas pueden ser proporciones directas o inversas; por lo tanto este ejercicio te apoyará en los problemas que enfrenta la familia Sánchez.

Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

$$1) \frac{x}{9} = \frac{10}{15}$$

Solución: $(15)x = (10)(9)$

$$15X = 90$$

$$X = \frac{90}{15}$$

$$X = 6.$$

$$2) \frac{4}{6} = \frac{6}{x}; \text{ solución: } x = 9$$

$$3) \frac{50}{x} = \frac{x}{2}; \text{ solución: } x^2 = 100$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{100}$$

$$X = 10$$

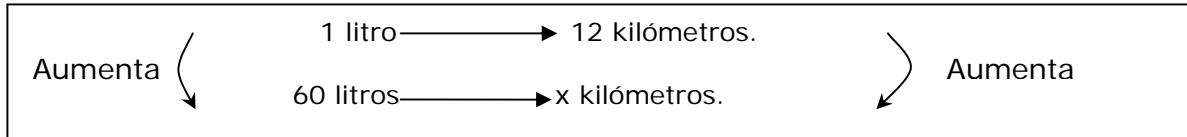
$$4) \frac{x}{2.6} = \frac{3.5}{x}; \text{ solución: } x = 3.01$$

$$5) \frac{14}{21} = \frac{x}{15}; \text{ solución: } x = 10$$

Si sabes que la capacidad del tanque de gasolina del automóvil del Sr. Sánchez es de 60 litros.

¿Cuántos kilómetros más recorrerá, si el tanque está lleno?

Analiza:



Observando y analizando el problema tenemos que la proporción es directa, porque en ambas cantidades se tiene un aumento.

Entonces la proporción que se forma es la siguiente:

$$\frac{1}{60} = \frac{12}{x}$$

Resuelve:

$$(1) x = (12) (60).$$

Completa el espacio, deberás encontrar el valor de x en la operación anterior.

a) $x =$ Kilómetros recorridos con el tanque lleno.

Los kilómetros recorridos que lleva, son de 230.; y con el tanque lleno recorre 720 kilómetros.

¿Qué operación debemos hacer para saber cuantos kilómetros más puede recorrer con el tanque lleno?

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 6

Llena la tabla siguiente y completa los datos que se piden.

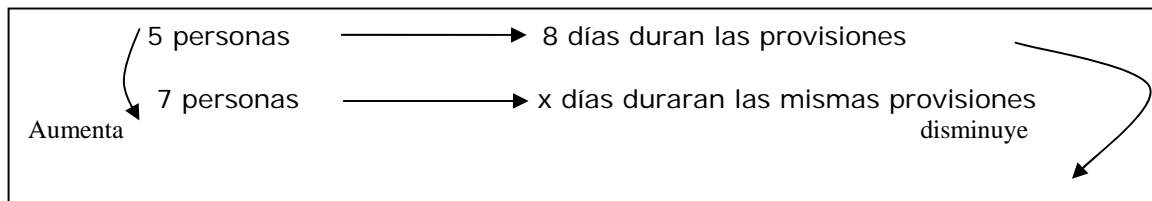
Kilómetros totales que puede recorrer con el tanque lleno el automóvil del Sr. Sánchez.	Kilómetros que lleva recorridos	Kilómetros que le faltan por recorrer con el tanque lleno.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

2.3. Proporción inversa

En el viaje que realiza la familia Sánchez, son en total 5 personas, pero en el camino se unen a ellos dos sobrinos. Si llevaban provisiones para 8 días de viaje y ahora son 7 personas en total, ¿Cuántos días aproximadamente les duraran las mismas provisiones?

Analiza el problema:



Si el número de personas aumenta, las provisiones durarán menos.

Debes conocer el concepto de proporción inversa:

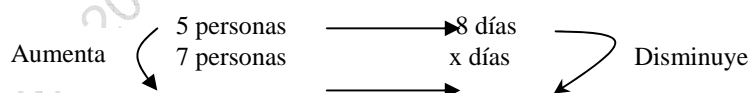
Dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales, cuando al aumentar una de ellas la otra disminuye en la misma proporción, de modo que el producto de ambas cantidades siempre permanece constante.

Ejemplos de cantidades que son inversamente proporcionales:

- 1) Para una misma obra, el número de obreros y el tiempo que emplean para realizarla.
- 2) Para una misma distancia, la velocidad de un móvil y el tiempo en recorrerla.
- 3) A temperatura constante, el volumen de los gases y las presiones a que se someten.
- 4) Para una cantidad de víveres, el número de personas y el tiempo que tardan en consumirlos.

Por lo tanto en el análisis anterior tenemos una proporción inversa, una cantidad aumenta mientras la otra disminuye.

Recuerda el análisis que se hizo:



Procede a dar su solución, forma las proporciones:

$$\frac{5}{7} = \frac{x}{8}$$

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para llevar un control el Sr. Sánchez, dibuja una tabla donde va anotando los datos del recorrido, en relación a la gasolina del tanque.

Kilómetros totales que puede recorrer con el tanque lleno.	Kilómetros que lleva recorridos	Kilómetros que le faltan por recorrer con el tanque lleno.
720	230	490

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

Para las proporciones inversas, en cualquiera de las dos razones (pero no en ambas), se intercambian sus valores; en este caso, como puedes observar se intercambia el valor de x y el de 8. Es decir se trabaja con el **recíproco** de $\frac{8}{x}$ que es $\frac{x}{8}$.

Encuentra el valor de x , de acuerdo a lo que se explicó anteriormente:

$$\begin{aligned}(5)(8) &= 7x \\ 40 &= 7x \\ 7x &= 40 \\ x &= \frac{40}{7}\end{aligned}$$

Este resultado conviértelo a fracción mixta. Para eso efectúa la división.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7 \overline{)40} \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

Entonces $\frac{40}{7} = 5\frac{5}{7} \approx 5.7$ días, duraran las provisiones que tenían para 8 días.

La fracción $\frac{40}{7}$, es **periódica infinita**, al igual su equivalente $5\frac{5}{7}$, por lo tanto se anota su aproximación, para cuestiones prácticas 5.7 días duraran las provisiones.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 7

Puedes resolver los siguientes problemas solo o en equipo.

1.-La familia Sánchez, al día siguiente de su llegada al municipio de Acayucan, desean visitar la plaza principal en donde encuentran el siguiente monumento:

Monumento al General Miguel Alemán González, precursor de la Revolución Mexicana en esta región, ubicado en el parque central.

Visitan el lugar a las 6 de la tarde, cuando el sol proyecta una sombra con el monumento de 3.8 metros. El hijo del Sr. Sánchez desea saber la altura del monumento y trae un lápiz que mide 17 cm, el cual a esa misma hora proyecta una sombra de 30 cm. ¿Cuál es la altura real del monumento que está visitando la familia Sánchez?

- Realiza la conversión de metros a centímetros correspondiente para resolver el problema.
- Analiza el problema para saber a que tipo de proporción pertenece.
- Resuelve el problema, encontrando la altura del monumento.
- Compara el resultado con tus compañeros.

2.-La familia Sánchez desea ir de Acayucan a la ciudad de Veracruz, como se muestra en el siguiente mapa:



Figura 2. Mapa de acayucan

Los dos sobrinos que viajaban con ellos desean irse aparte en otro automóvil.

Para hacer el mismo recorrido, la familia Sánchez viaja a 85 km/h y llega en 1.7 horas, los dos sobrinos llegan al mismo lugar en 1.2 horas, ¿a que velocidad viajaban, si la distancia recorrida es la misma?

- a) Analiza el problema para saber a que tipo de proporción pertenece (inversa o directa).
- b) Resuelve el problema encontrando la velocidad a la que viajaban los sobrinos.
- c) Compara el resultado con tus compañeros.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

1. La curiosidad del hijo del Sr. Sánchez, que quiere saber la altura exacta de un monumento que visitan; requiere el uso de proporción directa para poder encontrar el valor.

Solución:

a) Realiza la conversión de metros a centímetros correspondiente para resolver el problema.

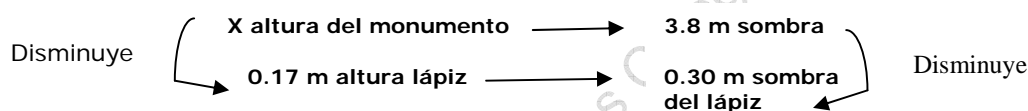
El monumento proyecta una sombra de 3.8 m y un lápiz de 17 cm proyecta una sombra de 30 cm; convertiremos los centímetros a metros.

1m = 100 cm

17 cm equivalen a $\frac{17}{100} = 0.17$ m

Y 30 cm equivalen a $\frac{30}{100} = 0.30$ m

b) Analiza el problema para saber a que tipo de proporción pertenece.



Como en ambos casos las cantidades disminuyen se trata de una proporción directa.

c) Resuelve el problema, encontrando la altura del monumento.

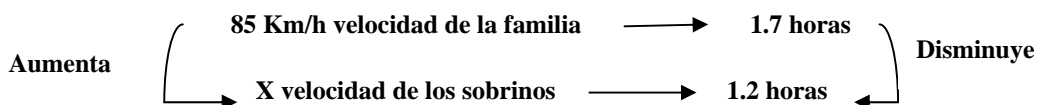
Solución: $\frac{x}{0.17} = \frac{3.8}{0.30}$
 $(0.30)x = (0.17)(3.8)$
 $x = \frac{(0.17)(3.8)}{0.30}$
 $x = 2.15$ m altura del monumento.

d) Compara el resultado con tus compañeros.

Cuando se compara el resultado entre iguales, cuya finalidad consiste en ver los aciertos y errores que se han cometido, aprendes más fácilmente.

2. Para llegar a un mismo lugar, se viaja a distintas velocidades, este procedimiento se establece en la última problemática del Sr. Sánchez, quien desea saber la velocidad a la que viajaban sus sobrinos.

a) Analiza el problema para saber a que tipo de proporción pertenece (inversa o directa).



La distancia es la misma por lo tanto los sobrinos deben viajar a mayor velocidad porque hacen menos tiempo en el recorrido.

Tenemos un problema de proporción inversa.

b) Resuelve el problema encontrando la velocidad a la que viajaban los sobrinos.

Solución: $\frac{85}{x} = \frac{1.2}{1.7}$ (en este caso trabaja con el recíproco de los tiempos)

$$x = \frac{(85)(1.7)}{1.2}$$

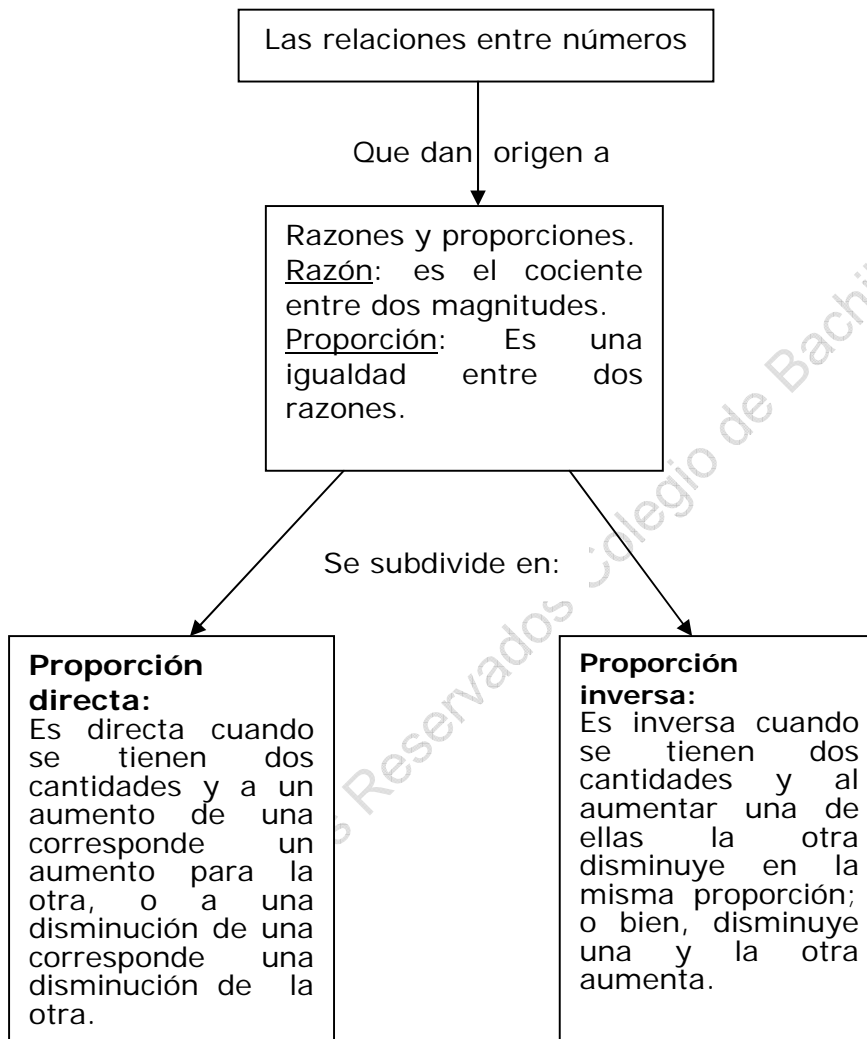
$x = 120.41$ Km/h. Velocidad a la que viajaban los sobrinos.

c) Compara el resultado con tus compañeros.

Cuando trabajas en equipo o comparas tus resultados con los demás, te das cuenta de los errores que cometes antes de preguntar a tu asesor.

RESUMEN

A través de un viaje con la familia Sánchez, aprendiste a dar solución a las problemáticas que se fueron presentando, tratando los siguientes temas.



Las proporciones tanto directas como inversas te abren un gran panorama en la solución de problemas que se te presentan en la vida cotidiana, entre las que podemos mencionar: la calificación y el número de aciertos en un examen, la velocidad y el tiempo para una distancia determinada, el importe del consumo de agua y el número de m^3 consumidos; y en múltiples cuestiones más, tanto científicas como tecnológicas.

Las matemáticas son y serán siempre importantes en tu vida, no importa la actividad a la que te dediques, por eso sigue adelante, revisa los siguientes núcleos y ¡buena suerte!

3. SERIES Y SUCESIONES

Para poder entender este tema, deberás repasar dos propiedades de campo de los números reales para la adición:

- **Asociatividad:** Para todo número a , b y c en \mathbb{R} , $(a+b)+c = a+(b+c)$ (esto quiere decir que no importa como se asocien tres números reales para realizar la suma, el resultado es el mismo).

Ejemplo:

$3+(4+5)=(3+4)+5$, sumado primero los términos que están agrupados en paréntesis queda:

$$3+9 = 7 + 5$$

$$12 = 12$$

- **Conmutatividad:** Para todo a y b en \mathbb{R} , $a+b = b+a$ (el orden de los sumandos no altera la suma).

Ejemplo:

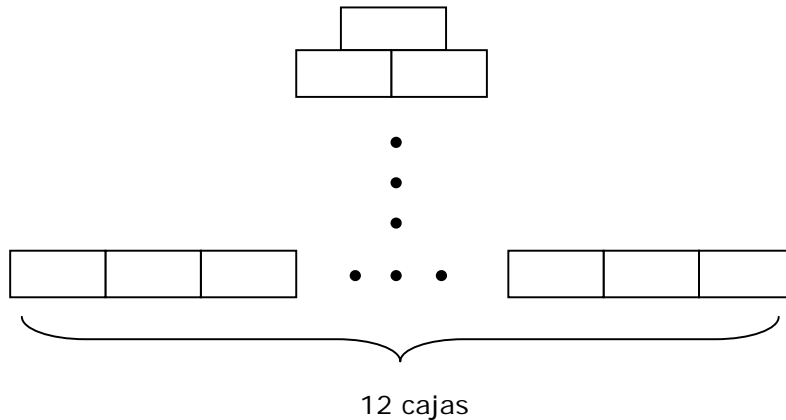
$$3+2=2+3.$$

La pirámide de Arturo.

Arturo trabaja en una embotelladora de refrescos el supervisor le pide que realice un arreglo de forma piramidal con las cajas de refresco y le ordena. "La base de la pirámide debe ser de 12 cajas, es decir la primera hilera se compone de 12 cajas, la que sigue de 11 cajas y así sucesivamente hasta llegar a una caja, la cual quedará arriba como punta".

Para construir la pirámide Arturo cuenta con 85 cajas de refresco ¿Cuántas cajas de refresco necesita Arturo para realizar este trabajo, le alcanzan o le sobran; existe alguna expresión algebraica que represente el problema?

Arturo se acuerda que cuando curso el bachillerato, le enseñaron a realizar algunos arreglos de está forma. Lo primero que hace es apoyarse con un dibujo como el que se muestra a continuación:



Después de realizar el dibujo Arturo piensa: La primera fila tiene 12 cajas, la tercera fila tiene 10 cajas, entonces se puede hacer una serie con estas cantidades.

Antes de continuar veamos la diferencia entre sucesión y serie, ya que nuestro amigo Arturo piensa analizar una serie.

Serie:

Suma de todos los términos de una secuencia dada.

Sucesión:

Es un conjunto de números que tienen una secuencia dada.

Ejemplos:

Sucesión: $\{1, 2, 3, 4\}$

Serie: $1+2+3+4 = 10$.

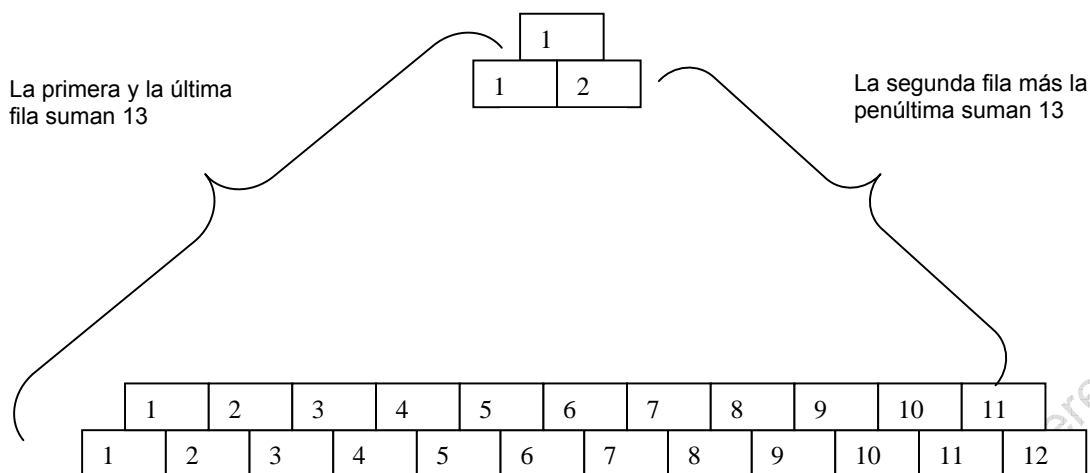
Arturo formó la serie de las cajas que tenía que apilar y anotó lo siguiente:

$$12+11+10+ \dots + 3+2+1.$$

Utilizando la **propiedad conmutativa** de la suma, se puede anotar lo siguiente:

$$1+2+3+ \dots +10+11+12.$$

Analiza el dibujo que hizo Arturo, observa que la primera fila con la última suman 13, la segunda fila más la penúltima fila suman 13, la tercera fila con la antepenúltima fila suman 13 y así sucesivamente.



¿Cuántas cajas de refresco necesita Arturo para realizar éste trabajo?

Un poco de historia:

En el salón de clases.

Era una mañana común y corriente como cualquier otra. El profesor ante un grupo de niños de alrededor de 10 años de edad, estaba molesto y decidió poner a trabajar a sus alumnos en un problema de matemáticas, que según él les llevaría un buen rato.

El problema consistía en sumar los primeros cien números enteros, es decir, encontrar la suma de todos los números del 1 al 100.

A los pocos segundos se levanto un niño, y deposito su pizarra sobre el escritorio del maestro.

Un poco más de media hora comenzaron a levantarse los demás niños para dejar su pizarra. Para sorpresa del profesor de todos los resultados el único correcto era el del muchacho que había entregado primero.

Mando llamar al chico y le pregunto de cómo lo había encontrado tan rápido. El niño respondió:

“Mire maestro, antes de empezar a sumar mecánicamente los cien primeros números me di cuenta de que si sumaba el primero y el último obtenía 101; al sumar el segundo y el penúltimo también se obtiene 101; al igual que al sumar el tercero y el antepenúltimo, y así sucesivamente hasta llegar a dos números centrales el 50 y el 51 que también suman 101. Entonces lo que hice fue multiplicar 101 por 50 para obtener mi resultado de 5 050.

Lo anterior ocurrió en Alemania en 1787 y por supuesto aquel niño genio era **Carl Gauss**, quien durante toda su vida continuó mostrando su impresionante capacidad para las matemáticas.

Al igual que Gauss, tu amigo Arturo analiza el arreglo que realizó y se da cuenta que la primera fila con la última suman 13 cajas, la antepenúltima y la segunda fila suman 13 y así sucesivamente; piensa “como tengo 12 filas, obtengo 6 pares de filas, es decir, tengo que multiplicar estos por 13 y así obtendré el resultado”.

Completa la siguiente tabla.

Total de cajas de refresco que necesita Arturo para realizar el trabajo.	_____ x _____ = _____
--	-----------------------

Arturo se pregunta: “¿Me sobrarán o me faltarán cajas para realizar este arreglo?”.

Llena los espacios de acuerdo a lo que te solicitan.

Total de cajas que le dan en el trabajo a Arturo	Total de cajas que necesita para realizar el arreglo.	Cajas de refresco que le sobran después de realizar el arreglo

Por lo que le sobran _____ cajas de refresco.

Después de un arduo trabajo, Arturo realiza la pirámide de cajas de refresco que le solicitó el supervisor.

Arturo se hace la siguiente pregunta: ¿existe alguna expresión algebraica que represente el problema?

Investiga en Internet y encuentra que existe una fórmula que ahorra operaciones:

$$1+2+3+4+5+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde “n” representa el último número de la serie, es decir, si la pirámide tiene como base 12 cajas de refrescos, entonces sustituye este valor en la fórmula anterior y obtiene el resultado que es:

$$1+2+3+4+\dots+12 = \frac{12(12+1)}{2} = 6(13) = 78 \text{ cajas.}$$

Que corresponde al mismo resultado que el había encontrado.

Arturo trabajó con una serie aritmética, ¿qué es?

3.1. Serie aritmética

Una serie aritmética o progresión aritmética es una sucesión de números racionales en la que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo.

Para indicar el término fijo que se va sumando suele usarse la letra d . Se expresan de la forma a_n que recibe el nombre de término n -ésimo. El índice indica la posición que ocupa en la sucesión.

Ejemplo:

$$d = 3$$

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 5 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 3 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 3 = 14$$

Por lo tanto se forma la serie o progresión aritmética:

$$5 + 8 + 11 + 14.$$

El término n -ésimo de una sucesión aritmética que comienza con el término a_1 y la diferencia común " d ", está dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1) d.$$

De la progresión aritmética que se formó anteriormente, con la fórmula del término n -ésimo; obtener el término a_{10} .

$$a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3.2. La suma de los " n " primeros términos de una serie aritmética

Para calcular la suma de términos en una serie aritmética se utiliza la fórmula siguiente:

La suma de los términos de una progresión aritmética (S_n) es:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Donde:

n = el número de términos que tiene la serie.

a_1 = el primer término de la serie.

a_n = el último término de la serie.

Arturo calculó la suma de la serie aritmética $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$, el calculo de esta suma le permite conocer cuantas cajas necesitaba para hacer su pirámide.

Utilizando la fórmula anterior calcula el total de cajas de refresco que utilizó Arturo.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Enchiladas - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 8

1. Utilizando la fórmula para la suma de los términos de una progresión aritmética, realiza el cálculo para:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12.$$

Fórmula:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$n = \boxed{}$$

$$a_1 = \boxed{}$$

$$a_n = \boxed{}$$

$$S_n = \boxed{}$$

2. De acuerdo a la explicación anterior, realiza el siguiente ejercicio en tu cuaderno, si tienes alguna duda repasa los temas o pregunta a tu asesor.

Conociendo el término fijo que se va sumando y el primer término, obtener los primeros 8 términos de las siguientes series aritméticas.

a) $d = 1.5$, $a_1 = .5$

b) $d = 4$, $a_1 = 3$

c) $d = 2$, $a_1 = -3$

Terminado el ejercicio anterior, encuentra la suma de las series aritméticas que formaste utilizando la fórmula (S_n).

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

1. Para calcular la suma de cualquier serie aritmética, como en este caso Arturo necesita calcular la suma de los 12 primeros números naturales es necesario conocer la fórmula, la cual tiene muchas aplicaciones en gran número de casos de la vida cotidiana.

$$n = \boxed{12}$$

$$a_1 = \boxed{1}$$

$$a_n = \boxed{12}$$

$$S_n = \boxed{78}$$

2. Este ejercicio te permitirá aplicar los conocimientos adquiridos hasta este momento, las aplicaciones en la vida cotidiana son innumerables cuando se estudian fenómenos naturales o biológicos.

$$a) .5+1.5= 2, 2+1.5=3.5, 3.5+1.5=5, 5+1.5=6.5, 6.5+1.5=8, 8+1.5=9.5, 9.5+1.5=11.$$

$$\text{Resultado: } .5+2+3.5+5+6.5+8+9.5+11.$$

$$b) 3+7+11+15+19+23+27+31$$

$$c) -3-1+1+3+5+7+9+11$$

$$a) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{8(.5 + 11)}{2} = \frac{8(11.5)}{2} = \frac{92}{2} = 46$$

$$b) S_n = 136.$$

$$c) S_n = 32.$$

Por el buen trabajo que realizó Arturo al hacer el arreglo en forma piramidal, el supervisor le da el día libre (generalmente en la embotelladora trabaja los domingos y descansa el lunes); como es domingo, Arturo decide visitar a un amigo que vende naranjas en un tianguis.

Al llegar al tianguis, su amigo Apolonio ha construido una pirámide con naranjas para que su mercancía se vea más llamativa, como puedes observarlo en la fotografía:



Figura 3. Pirámide de naranjas

Apolonio le dice a su amigo Arturo que en la base colocó 16 naranjas por lado, pero ahora quiere saber cuantas naranjas utilizó en total para hacer la pirámide sin deshacerla.

Como el sabe que Arturo siempre ha sido una persona con éxito y estudio en el Colegio de Bachilleres, le pide ayuda para responder sus dudas.

¿De que manera puedes calcular las naranjas en cada piso y existirá algún modelo que te permita realizar el cálculo del total de naranjas sin destruir la pirámide?

Lo primero que se le ocurre a Arturo, es realizar un diagrama de los primeros pisos para ir calculando la cantidad de naranjas en cada piso. Como la base es cuadrada se calcula el total por piso multiplicando lado por lado.

DIAGRAMA

Número de piso.	Frente	Lado	Total naranjas.
1	1	1	$(1)(1) = 1$
2	2	2	$(2)(2) = 4$
3	3	3	$(3)(3) = 9$

Arturo le dice a su amigo Apolonio que le ayude a llenar la siguiente tabla.

Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y llena los espacios que faltan.

Número de piso	Total de Naranjas por piso
1	1
2	4
3	
4	
5	
6	
7	
8	
.	
16	
17	
18	
n	n^2

Apolonio observa lo siguiente:

Si la variable, número de piso es “n”, el total de naranjas por piso es por lo tanto $n \times n = n^2$. Él necesita saber cuántas naranjas tiene su pirámide de 16 pisos.

¿Qué sucede con el total de naranjas en la pirámide?

Apolonio necesita completar la tabla anterior hasta el piso 16 y luego sumar los resultados.

Completa la tabla y realiza la suma que te solicitan.

Número de piso	Total de Naranjas por piso
1	1
2	4
3	9
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Instrucciones:	
12	
13	
14	
15	
16	
Total de naranjas en la pirámide	

Apolonio quiere construir su pirámide más alta, ahora con 22 pisos, ¿existirá alguna manera de calcular el total de naranjas sin necesidad de realizar tantas operaciones aritméticas?

Los dos amigos dejan al padre de Apolonio en el tianguis y se van a un Internet, para buscar más datos sobre la pirámide.

En una página que visitan encuentran que la formula que calcula el total de las naranjas es:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donde “n” es el número de pisos que tenga.

Como Apolonio quiere calcular el total de naranjas de 22 pisos.

Calculemos el resultado:

$$\frac{22(22+1)(2(22)+1)}{6} = \frac{22(23)(45)}{6} = \frac{22770}{6} = 3795 \text{ Naranjas.}$$

Los dos amigos salen del Internet y se despiden con un fuerte abrazo.

Camino a su casa Arturo se va pensando: “la serie $1+4+9+16+25 + \dots + n^2$, ¿es aritmética o geométrica?

Al llegar a su casa Arturo le habla por teléfono al que fue su profesor de cálculo llamado Jorge y le expresa su duda.

El profesor le contesta:

“No es una serie aritmética porque las diferencias entre términos no es la misma, a sea que $4-1$ no es igual a $9-4$ o $16-9$ etc.

Tampoco es una sucesión geométrica, porque las diferencias entre términos no tienen la misma razón, ya que se debe de cumplir con el siguiente modelo matemático:

$$u = ar^{n-1}$$

Donde:

u = último término de la sucesión
a = primer término de la sucesión
n = número de términos de la sucesión
r = razón.

Una sucesión geométrica sería:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,.....la razón común es 2
3, 9, 27, 81, 243,.....la razón común es 3.

En donde se observa claramente, que cada uno de los términos es multiplicado por el mismo factor, llámese en este caso razón.

En la serie formada por la sucesión 1+4+9+16+25+36+... no se observa esta misma proporcionalidad, o sea no existe la misma razón común para cada termino de la sucesión.

En mi opinión, no es una sucesión geométrica, más bien sería una serie con los primeros números naturales al cuadrado, así a secas, ni aritmética, ni geométrica. No todas las series tienen que ser forzosamente aritméticas o geométricas. Espero que este breviarío cultural le sirva para algo”.

Finalmente Arturo agradece a su profesor, y se despide de él.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 9

Contesta en tu cuaderno los siguientes ejercicios, si tienes alguna duda coméntala con tu asesor.

1.-En las siguientes series, anota si es aritmética, en caso afirmativo encuentra la suma de los 10 primeros términos.

a) $2+8+14+20+\dots$

b) $64+32+16+8+\dots$

c) $1+3+5+7+9+11+\dots$

d) $2+4+6+8+\dots$

2.- En la serie aritmética: $3+7+11+15+\dots$; encuentra el valor del término quincuagésimo (recuerda la fórmula $a_n = a_1+(n-1)d$).

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

En la vida cotidiana siempre nos encontraremos con la necesidad de conocer si una serie es aritmética, calcular un cierto número de términos, el ejercicio siguiente está considerando esa necesidad, resuélvelo.

1.-

a) $2+8+14+20+\dots$

Es aritmética porque $8-2=6$, $14-8=6$, $20-14=6$, la diferencia entre los términos es la misma, por lo tanto calculemos la suma de los 10 primeros términos.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$n = 10$$

$$a_1 = 2$$

$$a_{10} = a_1 + (n-1)d = 2 + (10-1)(6) = 2 + (9)(6) = 2 + 54 = 56$$

$$a_{10} = 56$$

$$\text{Sustituyendo: } S_{10} = \frac{10(2 + 56)}{2} = \frac{10(58)}{2} = \frac{(5)(2)(58)}{2} = 5(58) = 290$$

b) $64+32+16+8+\dots$

No es aritmética.

c) $1+3+5+7+9+11+\dots$

Si es aritmética.

$$S_{10} = 100$$

d) $2+4+6+8+\dots$

Si es aritmética.

$$S_{10} = 110.$$

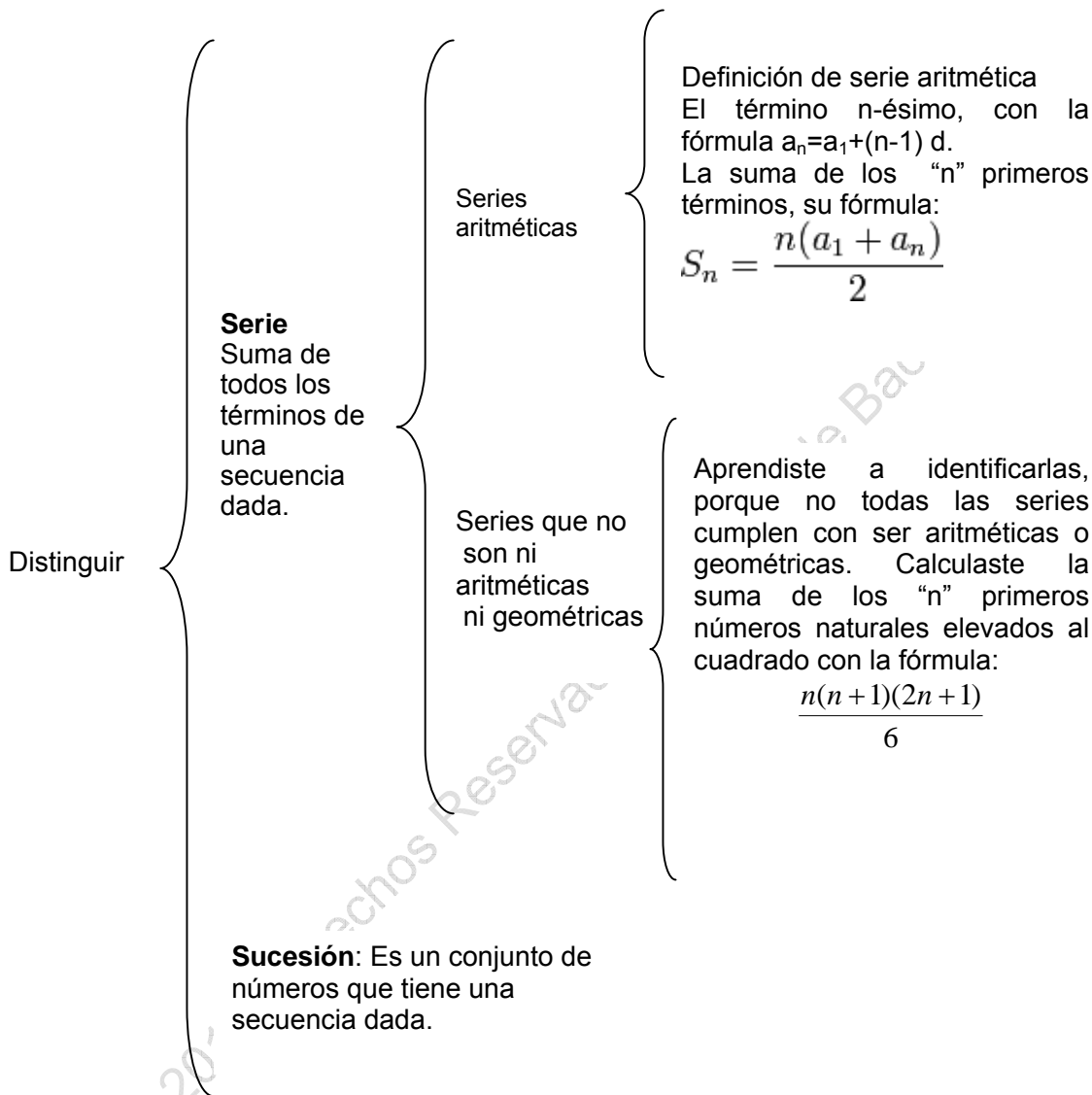
2.-

$$a_{50} = 199$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

RESUMEN

A través de situaciones cotidianas que se presentan en la vida, como en el caso de Arturo y Apolonio aprendiste a:



Las situaciones que se presentan en la vida cotidiana a veces no son tan comunes, como las series aritméticas o simplemente series, esto se da generalmente en situaciones de crecimientos poblacionales, en el estudio biológico de ciertos fenómenos naturales, por lo tanto es necesario conocer sobre este tema. El constante cambio en el mundo actual hace necesario su estudio. Te invito a que continúes revisando el último núcleo de este bloque temático, cuyo tema es de gran importancia para poder abordar el Bloque Temático 2 y te felicito por haber avanzado hasta este punto.

4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para abordar con éxito este tema, deberás recordar la correcta forma de leer números pequeños, por ejemplo:

- a) 0.1, se lee “un décimo”; porque se ocupa únicamente el primer lugar después del punto.
- b) 0.02, se lee “dos centésimos”; porque hay dos lugares después del punto decimal.
- c) 0.123, se lee “ciento veintitrés milésimos”; porque se ocupan tres lugares después del punto decimal.

Leyes de los Exponentes

El virus de la influenza.

La influenza porcina es una gripe nueva que contiene “partes” de gripe humana, porcina y aviar. Al principio se pensaba que se había generado en cerdos, de allí su nombre de gripe porcina, pero esto se descartó y ahora se llama influenza A1H1N1. Esta nueva variedad se contagia entre los humanos, pero a diferencia de otras gripes no ataca principalmente a los más débiles (niños y ancianos) sino que a los adultos sanos (20 a 40 años).

Se contagia como la gripe. Si alguien infectado estornuda o tose, el aire llevará el virus a otras personas que al estar cerca van a respirar el aire con virus. También si una persona infectada se pasa las manos por la cara y luego saluda con la mano, está traspasando los microbios en su saludo, de igual forma sucede con los besos en la mejilla y en la boca.

Se previene al igual que con cualquier gripe: alejándote de quien está enfermo. Podemos estar cerca de alguien infectado, pero tener mucho cuidado de usar mascarilla antiviral N95 (no contra bacterias). Es decir tener mucho cuidado con las manos y lo que se toca. Es recomendable no estar en espacios donde está mucha gente porque aumenta las posibilidades de contagio. No existe vacuna aun. El desarrollo de una vacuna puede tardar hasta seis meses, por lo que pronto, podemos contar en que este disponible. Hasta el momento se han identificado dos medicamentos antivirales que serian efectivos en el tratamiento de la influenza porcina: oseltamivir y zanamivir.

¿Cuánto debemos aumentar el microscopio para poder ver el virus de la influenza?

Generalmente cuando hablamos de virus, bacterias, son cantidades muy pequeñas, para poder estudiar este tipo de temas necesitamos conocer la notación científica, la cual nos permite abreviar cantidades muy grandes o pequeñas para poderlas leer o escribir más fácilmente.

Tomado de: <http://es.xalutis.com/blog/2009/04/27/influenza-porcina-explicado-enpalabras-simples-para-el-resto-de-nosotros/>

Notación Científica

La notación científica es un modo conciso de representar un número utilizando potencias de base diez.

“El primer intento de representar números demasiados grandes fue emprendido por el matemático y filósofo griego Arquímedes, descrita en su obra. El contador de Areia en el siglo III a. C. Ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo. El número estimado por él era de 10^{63} granos”.

Podemos decir que una bacteria mide 0.00001 metros y el virus de la influenza mide 0.0000001 metros.

Podríamos mencionar otro ejemplo, el de una cantidad mucho más pequeñísima; referirnos a la longitud de onda de los rayos cósmicos, se podría decir que su medida es inferior a 0.000000000000001metros.

Sin embargo, en los textos científicos o técnicos las cifras no aparecen escritas de forma tan pequeña, sino más bien simplificadas, utilizando un procedimiento matemático denominado “notación científica”.

Para escribir las medidas de la bacteria, el virus y los rayos cósmicos en notación científica se procede de la siguiente manera:

Ejemplos:

1) Bacteria: 0.00001 metros

$$\underbrace{0.00001 \text{ m}} = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Se recorre el punto decimal 5 lugares hacia la derecha.

2) Virus de la influenza: 0.0000001 metros.

$$\underbrace{0.0000001 \text{ m}} = 1 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Se recorre el punto decimal 7 lugares hacia la derecha

3) Los rayos cósmicos: 0.000000000000001metros.

$$0.000000000000001\text{m} = 1 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

Pero que ocurre cuando la cantidad es exageradamente grande como la velocidad de la luz, que es de trescientos millones de metros por segundo, o también de 300 000 000 m/seg. Para cantidades muy grandes, se procede de la siguiente manera:

Ejemplo:

1) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/seg.

$$300\ 000\ 000. \text{ m/seg} = 3 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

Se recorre el punto decimal 8 lugares hacia la izquierda.

Observa que si el exponente es positivo la cantidad representada en realidad es mayor; si el exponente es negativo la cantidad representada es menor.

En los siguientes ejemplos se tiene el procedimiento inverso, la cantidad se expresa en notación científica y el resultado se expresa sin ella.

Ejemplos:

1) $9.4532 \times 10^3 = 9453.2$

2) $1.8248 \times 10^{-4} = 0.00018248$

Completa la siguiente tabla llenando los espacios en blanco.

$\frac{1}{1000}$				10		1000
	10^{-2}	10^{-1}	10^0		10^2	

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 10

Trabaja en equipo y resuelve los siguientes ejercicios.

1.-En cada caso, escribe como potencia de 10.

- a) 0.001 =
- b) 1 000 =
- c) 1 000 000 =
- d) 0.0001 =

2.-Anota el número que corresponde a la información que se da sin utilizar notación científica.

- a) Las estrellas más viejas tienen aproximadamente 15×10^9 años.
- b) Distancia de la Tierra a la Luna es $3\,844 \times 10^2$ kilómetros
- c) Distancia que recorre la luz del sol para llegar a la Tierra 15×10^7 kilómetros.

3.-Expresa en notación científica los siguientes números.

- a) Desaparición de los dinosaurios: 65 000 000 años.
- b) Medida del virus de la gripe: 0.000000120 metros.
- c) Medida del virus del SIDA: 0.0000001 metros.

5. LEYES DE LOS EXPONENTES

Para poder abordar la problemática del virus de la influenza necesitas conocer la siguiente nomenclatura:

Exponente

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Base

La base se multiplica por si misma tantas veces como indique el exponente

¿Quién tiene mayor tamaño, el virus o la bacteria?

Tamaño de virus y bacterias:

Una bacteria mide de 10 micras (μ) de largo. Una micra es la millonésima parte del metro (10^{-6}). El virus de la influenza mide 100 nanómetros (nm) de largo. Un nanómetro es una milmillonésima de metro (10^{-9}).

Observa las siguientes imágenes:

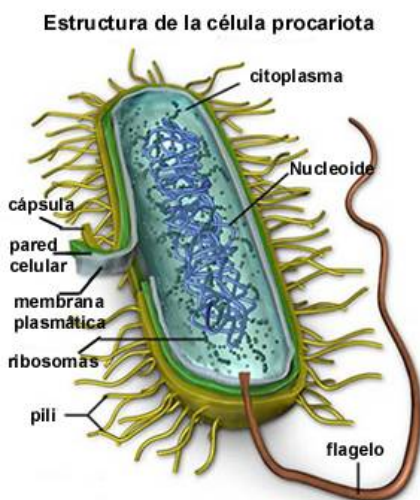


Figura 4. Bacteria

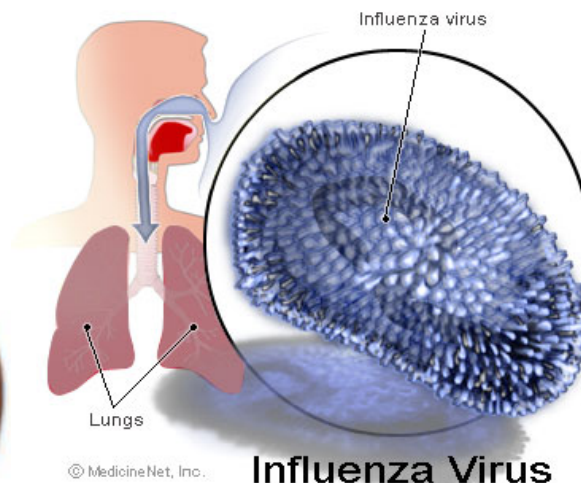


Figura 5. Virus.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Estudiar la notación científica y hacer más ejercicios sobre el tema te permite desenvolverte mejor a lo largo de este núcleo, en el ejercicio 2 y 3, puedes observar que la notación científica también tiene aplicaciones en astronomía y en paleontología

1.-

- a) 1×10^{-3}
- b) 1×10^3
- c) 1×10^6
- d) 1×10^{-4}

2.-

- a) 15 000 000 000 años.
- b) 384 400 kilómetros
- a) 150 000 000 kilómetros.

3.-

- a) 65×10^6 años.
- b) 12×10^{-8} metros.
- c) 1×10^{-7} metros.

Si quieres conocer cuanto debes aumentar el microscopio para ver el virus de la influenza; primero analizaremos otras cuestiones relacionadas.

5.1. Exponentes enteros

Compara ahora la bacteria con el virus de la influenza.

Bacteria		Virus de la influenza	
10 micras=	$(10)(10^{-6})$ m	100 nanómetros	100×10^{-9} m

Efectuaremos una conversión para esto necesitamos la siguiente ley de los exponentes:

- 1) Producto de dos potencias de la misma base.

El producto de dos potencias de la misma base (distinta de cero), es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.

Ejemplos:

a) $(x^2)(x^3) = x^{2+3} = x^5$

b) $(m^2)(m^a) = m^{2+a}$.

c) $(x^m)(x^n) = x^{m+n}$

Utilizando está ley tenemos lo siguiente:

Para el virus de la influenza.

100 nanómetros = 100×10^{-9} m

$10^2 \times 10^{-9}$ m (bases iguales, los exponentes se suman).

Por lo tanto: $10^{2+(-9)} = -7 = 10^{-7}$ m

Para la bacteria.

10 micras = $10 \times 10^{-6} = 10^1 \times 10^{-6} = 10^{1+(-6)} = 10^{-5}$ m.

Para comparar la longitud de la bacteria con la longitud del virus, veamos la siguiente ley:

- 2) División de potencias de la misma base, distinta de cero.

Cuando se dividen bases iguales, los exponentes se restan algebraicamente.

Ejemplos:

a) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

b) $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

c) $\frac{6a^5b^4}{2a^3b^{-1}} = 3a^{5-3}b^{4-(-1)} = 3a^2b^5$. Observa que en este ejemplo también se divide $6 \div 2$ cuyo resultado es 3.

Ahora realiza la comparación de la bacteria con el virus.

$$\frac{\text{bacteria}}{\text{virus}} = \frac{10^{-5}}{10^{-7}} = 10^{-5-(-7)} = 10^{-5+7} = 10^2 = 100 \text{ veces.}$$

La longitud de la bacteria es 100 veces más grande que el virus.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 11

Trabaja en parejas y contesta los siguientes ejercicios.

Simplifica las siguientes expresiones utilizando las leyes de los exponentes.

a) $x^{-3}(x^4)(x^2) =$

b) $10^{-1}(10^1) =$

c) $\frac{24a^3}{3a^{-4}} =$

d) $\frac{65x^5y^4}{5xy^3} =$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para hacer conversiones del virus y la bacteria a unidades conocidas como el metro se utilizaron leyes de los exponentes que se presentan en el siguiente ejercicio, así como el cociente de comparación de la bacteria con el virus.

a) x^3

b) $10^0 = 1$

c) $8a^7$

d) $13x^4y$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

Ahora contestaremos la pregunta: ¿Cuánto debemos aumentar el microscopio para poder ver el virus de la influenza?



Para poder observar virus es necesario tener un microscopio electrónico. Si el visor del microscopio tiene 100X significa que el organismo aparecerá 100 veces más grande de lo que es, "F", llamado factor de agrandamiento es igual a 100, es decir $F = 100$.

Si al observar el virus en el microscopio se puede ver de un tamaño de 3 centímetros; ¿Qué factor se utilizó para que se pueda ver de ese tamaño?

Tenemos los siguientes datos.

Longitud del virus de la influenza en el microscopio	3 centímetros	3×10^{-2} m
Longitud real del virus	100 nm	1×10^{-7} m

Calculemos el factor de agrandamiento:

$$F = \frac{3 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-7}} = 3 \times 10^{-2-(-7)} = 3 \times 10^{-2+7} = 3 \times 10^5 = 300000 \text{ veces.}$$

Es decir el virus se amplió trescientas mil veces para poderlo apreciar.

La curiosidad del ser humano nos permite seguir haciéndonos preguntas como la siguiente:

¿Cuántos virus necesitamos para igualar la masa de un mosquito?

Masa del virus de la influenza: el virus tiene una masa estimada de 1×10^{-20} kilogramos.

Un mosquito tiene una masa aproximada de 2.5 miligramos.

Para poder comparar las dos masas, la del mosquito con la del virus, ambos deben estar en la misma unidad; las dos masas las convertiremos a gramos y después realizaremos las comparaciones.

Recuerda que:

1 miligramo = 0.001 gramo

Por lo tanto: 2.5 miligramos equivale a tener 0.0025 gramos; siendo está la masa del mosquito en gramos.

Diámetro = 2 milímetros.

Radio = 1 milímetro.

Sabemos que el área de un círculo es: $A = \pi r^2$

El radio de 1 mm convertido a metros $r = 0.001$ metros, es decir $r = 1 \times 10^{-3}$ m.

Para sustituir estos datos en la fórmula (área de un círculo), necesitamos conocer las siguientes leyes de los exponentes:

3) Potencia de potencia.

Cuando se eleva una potencia a un exponente, los exponentes se multiplican.

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Ejemplo:

1) $(x^3)^4 = x^{12}$

4) Potencia de un producto.

Cuando se eleva un producto de dos o más cantidades, cada término se eleva a dicha potencia.

$$(xy)^n = x^n y^n$$

Ejemplos:

1) $(10x^3)^2 = 10^2(x^3)^2 = 100x^6$

2) $(3c^5y^2)^3 = 3^3(c^5)^3(y^2)^3 = 27c^{15}y^6$

Calcula el área de la cabeza de un alfiler en metros.

A =

Ahora obtendremos el área que ocupa un ácaro, considerando que tiene de largo 100 micras y generalmente su forma es redonda, por lo tanto también debemos obtener el área de un círculo y las unidades deberán estar en metros.

Obtener el área que ocupa un ácaro, considerando:

$$A = \pi r^2$$

Diámetro = 100 micras = $(100)(10^{-6})$ m.

Radio = 50 micras = $(5)(10^1)(10^{-6})$ m

A =

Para dar solución a la pregunta inicial ¿Cuántos ácaros caben en la punta de un alfiler?, dividimos el área del alfiler entre el área del ácaro.

$$\frac{\pi \times 10^{-6}}{25\pi \times 10^{-10}} = \frac{1}{25} 10^{-6-(-10)} = \frac{1}{25} 10^{-6+10} = \frac{1}{25} 10^4 = \frac{1 \times 10^4}{25} = \frac{10^4}{25} = \frac{10000}{25} = 400 \text{ ácaros.}$$

Por lo tanto concluimos que, en la cabeza de un alfiler caben 400 ácaros.

Estos huéspedes diminutos se encuentran generalmente en las habitaciones y se alimentan de piel humana y animal, abundan en colchones, mantas y sofás. Sus excrementos son los factores que pueden causar alergias y síntomas de asma, limpiando y aspirando regularmente tu habitación puedes prevenir su excesiva propagación.

5.2. Exponentes fraccionarios

El uso de las leyes de los exponentes, tiene múltiples aplicaciones en la medicina y la biología, te presentamos a continuación tres leyes de los exponentes en donde aparecen términos fraccionarios.

Potencia de una fracción.

Para elevar una fracción a un exponente, cada término de la fracción se eleva a dicho exponente.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Ejemplos:

$$1) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$2) \left(\frac{3x}{6y^3}\right)^3 = \frac{(3x)^3}{(6y^3)^3} = \frac{3^3 x^3}{6^3 (y^3)^3} = \frac{27x^3}{216y^9}$$

Exponente entre negativo.

Todo número distinto de cero, elevado a un exponente negativo (entero), es igual a una fracción que tiene por numerador a la unidad y por denominador al mismo número racional con el exponente positivo.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Ejemplos:

$$1) 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$2) \frac{x^{-3}}{y^{-2}} = \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{y^2}} = \frac{y^2}{x^3}$$

Exponente fraccionario.

Cuando cierta cantidad se encuentra elevada a un exponente fraccionario, este equivale a tener una raíz de dicha cantidad.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplos:

$$1) x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$2) 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$$

Los temas que estudiaste en este núcleo no son tan sencillos como los anteriores, por eso te presentamos a continuación una tabla que muestra las leyes de los exponentes y un ejemplo de cada uno.

Ley	Ejemplo
$x^1 = x$	$5^1 = 5$
$x^0 = 1$	$7^0 = 1$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$10^{-1} = \frac{1}{10}$
$x^m x^n = x^{m+n}$	$X^2 X^3 = X^{2+3} = X^5$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{x^4}{x^3} = x^{4-3} = x^1 = x$
$(x^m)^n = x^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6$
$(xy)^n = x^n y^n$	$(xy)^3 = x^3 y^3$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 12

Trabaja con ayuda de un compañero(a), toma en cuenta todos los conocimientos adquiridos a partir del núcleo 1 de este bloque.

1.-Simplifica los siguientes ejercicios, no dejes en el resultado exponentes negativos o ceros.

a) $3^2(3^5) =$

b) $c^6(c^4)c =$

c) $3x^2(-5x^3) =$

d) $(-4c^2b^3)(-3cb) =$

e) $(7x^{-3}y^{-8})(8x^5y^5) =$

f) $(5+y)^0 =$

g) $\frac{x^{12}}{x^5} =$

$$h) \frac{-15b^8c^3}{3b^5c^2} =$$

$$i) (2xy^2)^4 =$$

$$j) (2m^2n^{-3})^{-4} =$$

2.- Cuenta el número de veces que tu corazón late en un minuto, si consideras que conservará el mismo ritmo de latidos.
Calcula:

a) ¿Cuántas veces latirá en los próximos 60 años?

b) Expresa tu resultado en notación científica.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Esta actividad te permite afianzar tus conocimientos, todo lo que aprendiste en este núcleo y en los anteriores te servirán de apoyo para poder resolver esta actividad con éxito.

1.-

a) 3^7

b) c^{11}

c) $-15x^5$

d) $12c^3b^4$

e) $56x^2y^{-3}$

f) 1

g) x^7

h) $-5b^3c$

i) $16x^4y^8$

j) $\frac{n^{12}}{16m^8}$

2.-

Si consideramos que el corazón late 60 veces por minuto.

a) 45411840000 veces.

b) 4.541184×10^{10}

RESUMEN

Analizando un caso actual como es el virus de la influenza A H1N1, donde conociste y aprendiste a comparar un virus con otros elementos científicos, por medio de:

1) Las leyes de los exponentes:

$x^m x^n = x^{m+n}$	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$(x^m)^n = x^{mn}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
---------------------	-----------------------------	--------------------	--	--------------------------	-----------------------------------

Estas seis leyes, comprenden los fundamentos esenciales para poder abordar operaciones con polinomios, además tenemos la ley que dice: “toda cantidad elevada a exponente cero dará siempre como resultado uno”.

$$x^0 = 1$$

2) Notación científica:

La notación científica es una aplicación práctica de las leyes de los exponentes, con potencias de diez, en donde se pueden representar cantidades muy grandes o muy pequeñas haciendo uso de este concepto tan valioso, con ella se pueden hacer conversiones que resultan más fáciles de leer como:

Medida del virus de la gripe: 0.000000120 metros equivalente a tener una medida de: 12×10^{-8} m.

Como recordarás si la cantidad es muy grande el exponente es positivo y si la cantidad es pequeña el exponente es negativo.

Por lo tanto podemos concluir que:

Las bacterias tienen un papel fundamental en la naturaleza y en el hombre; además en la industria permiten desarrollar investigaciones en fisiología celular y en genética.

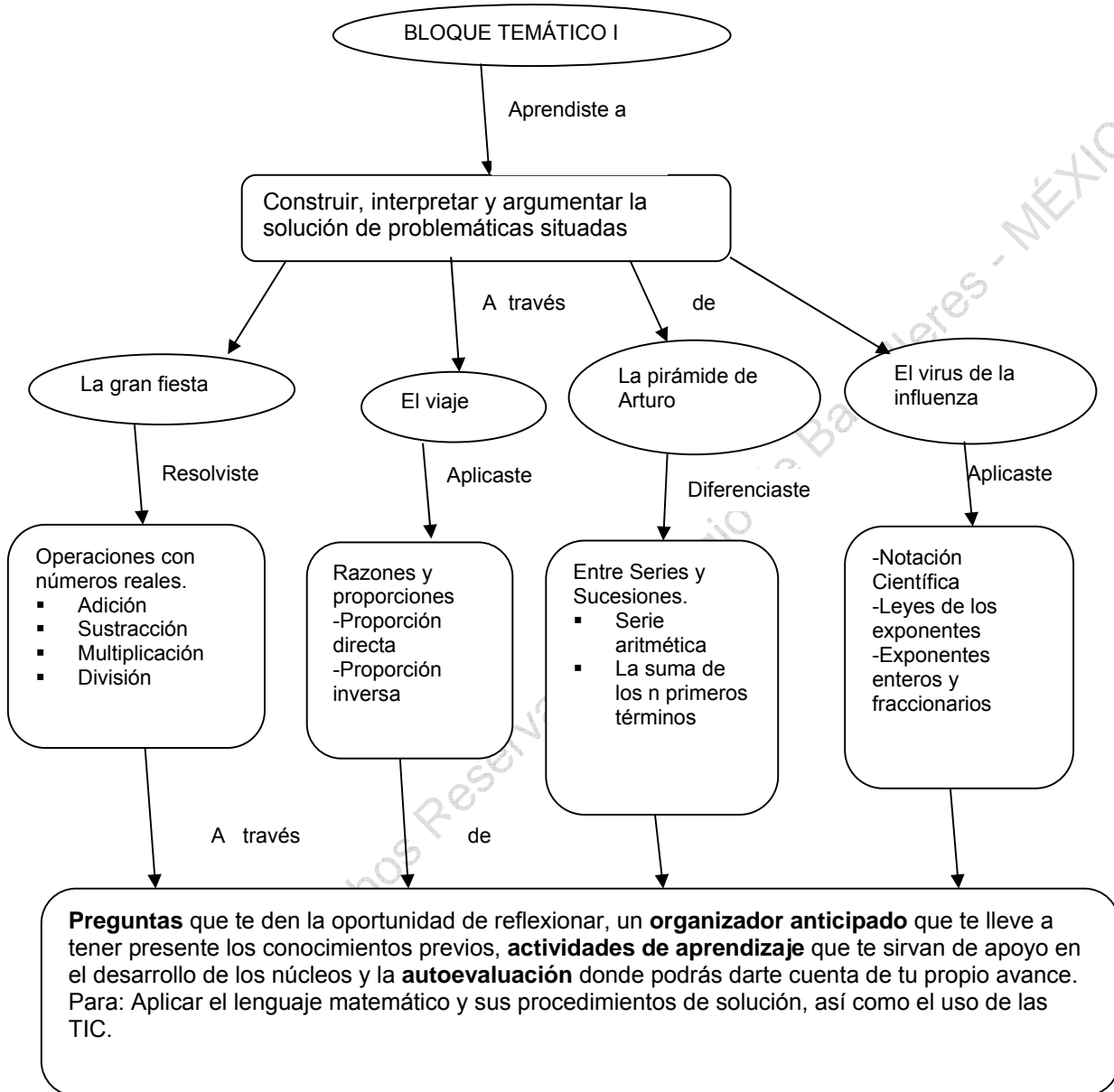
Las bacterias más pequeñas son más grandes que el mayor de los virus y es importante que sepas que un virus puede invadir una bacteria; por lo tanto es muy indispensable que tomes medidas de prevención contra el virus de la influenza y cuidarte mucho de un contagio.

A parte de todas las utilidades que hemos visto a lo largo de este núcleo temático, las leyes de los exponentes te serán muy útiles en el estudio del Bloque 2, de la materia “Solución de problemas reales”. Donde iniciarás resolviendo operaciones con expresiones algebraicas, es por eso que estos fundamentos te serán de gran utilidad en la suma, resta, multiplicación y división de polinomios, así como en el desarrollo de productos notables.

Por lo tanto te felicito por haber concluido el Bloque Temático 1 y te invito a continuar con el Bloque Temático 2, adelante y ¡BUENA SUERTE!

RECAPITULACIÓN

¿Qué aprendiste en el Bloque Uno? Fundamentos: Aritméticos y Algebraicos.



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Resuelve los siguientes problemas teniendo en cuenta todos los conocimientos adquiridos durante los núcleos temáticos que revisamos en este material; trabaja en equipo o de manera individual.

1.-“José recibe \$ 250.00 a la semana para sus gastos. De lunes a viernes va a la escuela, por lo que aborda dos tipos de transporte público: uno le cobra \$ 4.00 y el otro \$ 5.50; considera los mismos gastos para su regreso.

Además, en la comida de un día gasta \$ 25.00. José quiere comprar un CD de videojuegos con lo que le sobra de la semana; si el videojuego cuesta \$ 80.00”.

Calcula:

a) ¿cuánto le falta para comprar el CD?

José le platica a un amigo de la escuela, sobre el CD que quiere comprar, y el amigo le propone lo siguiente:

-Si me prestas tu CD un fin de semana, yo te ayudo con la quinta parte de lo que cuesta.

Resuelve:

b) ¿Cuánto le debe prestar el amigo a José?

Utiliza el método de división y el método de descomposición en factores primos para encontrar la respuesta a lo que se pide.

2.-El Sr. Sánchez, que es gerente de ventas en un centro de teléfonos celulares, establece la siguiente política de ventas:

Si la venta lograda en un periodo de tiempo establecido es de \$ 3 000.00, el vendedor recibe un bono de \$ 500.00.

Un vendedor logra en ese periodo de tiempo una venta de \$ 5 500.00.

Calcula:

a) ¿De cuánto es su bono?

3.-En el año 550 a.c. el matemático griego Pitágoras reunió a un grupo de jóvenes estudiantes a quienes se les conoció como la sociedad Pitagórica, ellos se dedicaron a estudiar los patrones de números y la teoría a través de estos, ellos pensaban que ciertos números reflejaban la armonía del Universo.

Los números triangulares son algunos de los que estudiaron los Pitagóricos, “un **número triangular**, es aquel que puede recomponerse en la forma de un triángulo equilátero”, como se muestra en la figura:

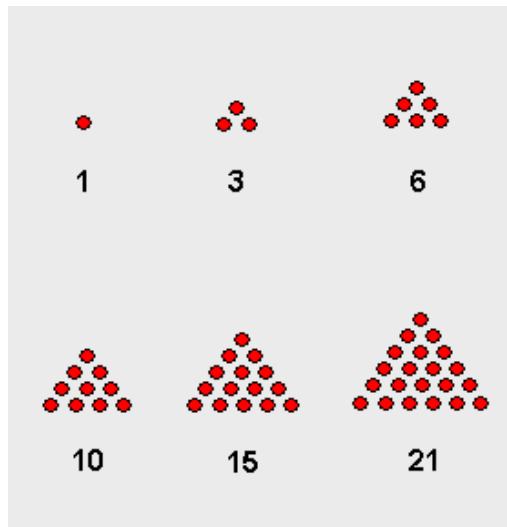


Figura 6. Triangulo

Contesta:

- Escribe los 8 primeros términos, que se forman de la serie de números triangulares.
- Calcula la suma de los 8 primeros números triangulares, utiliza la formula:

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

- Explica porque no es una serie aritmética.

4.-El cuerpo humano contiene aproximadamente 25 billones de células de sangre. Cada célula de sangre contiene 250 millones de células de hemoglobina.

Si cada molécula de hemoglobina puede llevar 4 moléculas de oxígeno.

Contesta:

- El número de moléculas de oxígeno transportadas por una persona en la sangre.
- Escribe en notación científica tu resultado.

Para verificar que tus respuestas hayan sido correctas revisa el apartado de Autoevaluación que se presenta a continuación.

AUTOEVALUACIÓN

A partir de las soluciones que diste a los reactivos de la actividad de consolidación, te presento los niveles de desempeño para que tu mismo ubiques tu nivel y decidas presentar tu evaluación del Bloque Temático I; además, la solución a las problemáticas situadas para que tu mismo sea capaz de autoevaluar el desempeño que tuviste.

En este problema utilizas operaciones con números reales, el uso de estos nos sirve para calcular y hacer cuentas como las que hace José en los gastos que tiene para desplazarse a la escuela y lo que desea ahorrar. Si únicamente resolviste este reactivo con éxito estas en el nivel de desempeño: insuficiente.

1.-

a) \$ 50.00

b) \$ 16.00

En el problema número dos, utilizas razón y proporción para obtener el total del bono que debe recibir un vendedor cuando logra una venta por arriba de la cuota establecida. Si lograste contestar exitosamente el problema uno y dos tu nivel de desempeño es suficiente.

2.-

a) \$ 916.66.

Este problema corresponde al tercer núcleo temático, en el cual trabajas los temas de series y sucesiones, en él se presenta la solución a los números triangulares cuyos creadores fueron los pitagóricos. Si tienes las respuestas correctas a los tres primeros problemas de la actividad de consolidación te felicito porque te encuentras en el nivel de desempeño Bien.

3.-

a) Los 8 primeros términos son: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36.

b) 120

c) No es una serie aritmética porque las diferencias entre términos no es la misma, es decir $3-1 = 2$, $6-3 = 3$, $10-6 = 4$, no tiene una razón fija que se le pueda ir sumando a cada término para obtener el siguiente.

En el campo científico se utiliza constantemente la notación científica para representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, en este reactivo tendrás que encontrar aproximadamente, el número de moléculas de oxígeno transportadas por una persona en la sangre. Si resolviste adecuadamente los cuatro ejercicios que comprende la actividad de consolidación, quiero darte un fuerte abrazo y felicitarte por todo tu esfuerzo y desempeño porque tu nivel es: Excelente.

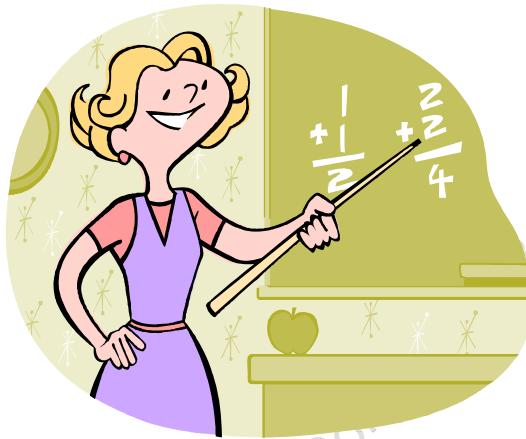
4.-

a) 25,000,000,000,000,000,000,000

b) 25×10^{21} moléculas de oxígeno.

BLOQUE TEMÁTICO DOS

APLICANDO EL ÁLGEBRA



$$\frac{[(x+2)(x-2)]}{[(x+2)(x+2)]}$$
$$\frac{[(x+2)(x-2)]}{[(x+2)(x+2)]}$$

Autor: Irma Guadalupe León Hernández

Asesor Pedagógico: Dora María Mireles Alvarado

BLOQUE TEMÁTICO DOS

APLICANDO EL ÁLGEBRA

PROPÓSITO

1. Operaciones con polinomios

1.1. Operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios

1.1.1. Suma-Resta de Monomios

1.1.2. Multiplicación de Monomios

1.1.3. División de Monomios

Actividad de Aprendizaje 13

1.1.4. Suma-Resta de Polinomios

1.1.5. Multiplicación de Polinomios

1.1.6. División de Polinomios

Actividad de Aprendizaje 14

1.2. Operaciones de la multiplicación de polinomios y la relación con los productos notables.

1.2.1. Binomio al cuadrado

1.2.2. Binomio con término común

1.2.3. Binomio conjugado

Actividad de Aprendizaje 15

Resumen

2. Operaciones de factorización

2.1. Por factor común

2.2. Trinomios de la forma x^2+bx+c (trinomio cuadrado perfecto)

2.3. Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Actividad de Aprendizaje 16

Resumen

3. Operación y simplificación de expresiones algebraicas

Actividad de Aprendizaje 17

Resumen

RECAPITULACIÓN

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

AUTOEVALUACIÓN

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

PROPÓSITO

¿Qué vas a lograr?

- A analizar e identificar los elementos medulares de un problema
- A seguir instrucciones y procedimientos con una actitud crítica y reflexiva
- Sintetizar evidencias para producir conclusiones y formular nuevas preguntas

¿Qué conocimientos desarrollarás?

Identificación de las variables y la relación entre ellas en la resolución de problemas de polinomios.

¿Cómo lo realizarás?

Mediante la organización de la información y aplicación de modelos matemáticos que te permitirán la solución de problemas.

¿Para qué te va a servir?

Para desarrollar habilidades que te permitan interpretar, argumentar y generalizar los procedimientos para solucionar las problemáticas que se plantean en otras disciplinas y en la vida cotidiana.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

BLOQUE TEMÁTICO DOS

APLICANDO EL ÁLGEBRA

La importancia de entender las matemáticas de una manera más didáctica, es necesaria e importante, sobre todo en este bloque, donde se abordarán temas que nos permitan ir **“Aplicando el álgebra”**, ya que es fundamental que construyas e intérpretes modelos matemáticos a partir de procedimientos aritméticos y algebraicos que te proporcionen las bases necesarias para comprender y abordar los temas del bloque temático tres, así como también que resuelvas problemas matemáticos que te ayuden a desarrollar las diversas operaciones del Algebra, ya que es la base para entender y resolver diversos temas de matemáticas, que se abordan en otras áreas como son: Funciones, Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo y Estadística.

Es por ello, que en este bloque, desarrollarás habilidades y conocimientos que te permitirán aplicar el Algebra, mediante el planteamiento de Problemáticas situadas, para que comprendas la teoría, desarrolles procedimientos y des soluciones a diversos problemas, basándote en tus conocimientos previos de la Aritmética, estudiada en el bloque temático anterior.

Ante esta visión de cómo aplicar y entender las matemáticas, especialmente al aplicar el “Algebra”, es necesario que conozcas y desarrolles previamente procedimientos, mediante ejercicios resueltos, que te permitirán entender los métodos de solución para cada tema y que a su vez, te permitan comprender como puedes llegar a resolver la problemática planteada, para que finalmente puedas argumentar la importancia del estudio de las matemáticas y el vínculo que tiene esta con respecto a otras asignaturas y con la realidad, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

1. OPERACIONES CON POLINOMIOS

En el bloque temático anterior, aprendiste a desarrollar y aplicar la Aritmética, a través de problemáticas situadas y entre los temas que estudiaste se encontraron el Lenguaje Algebraico y Notación Científica, los cuales serán de gran utilidad para entrar a la “Aplicación del Algebra”.

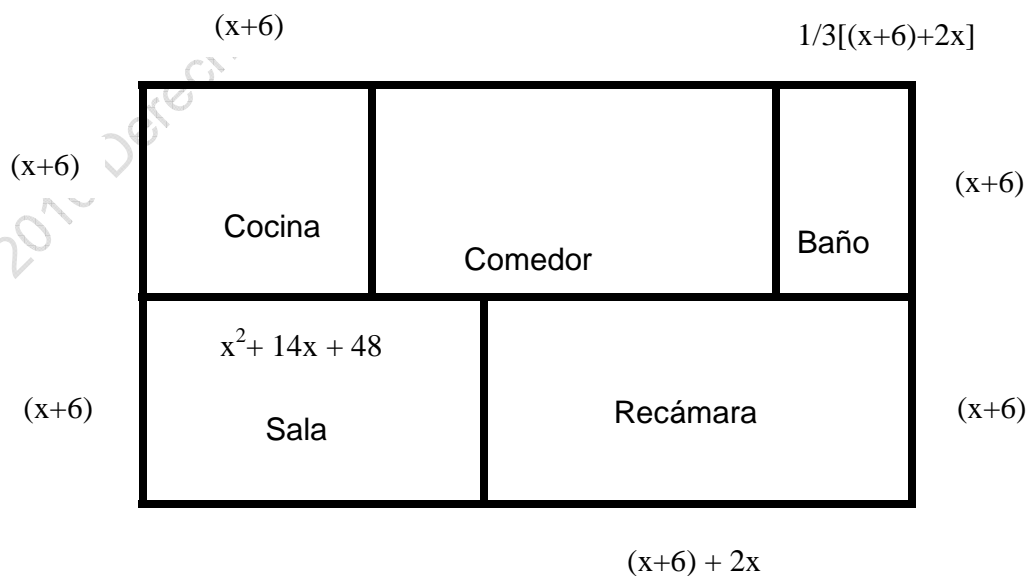
En este bloque aprenderás a identificar variables para solucionar problemas de situaciones reales, donde se apliquen operaciones polinomiales y puedas construir modelos matemáticos donde puedas relacionar la multiplicación con los productos notables (binomio al cuadrado, binomio con término común y binomio conjugado), para que posteriormente se argumente la solución obtenida, mediante procedimientos y métodos aritméticos y algebraicos.

Para lograr esto, iniciaremos con la siguiente problemática situada:

El Departamento de lujo de Marcial

Marcial, que es un profesor de matemáticas, construyó un departamento de lujo acorde al croquis que se ve abajo, las medidas las planteó en expresiones algebraicas: la **cocina** es **cuadrada** y **mide $(x + 6)$ de lado**, la **recámara** tiene el **mismo ancho que la cocina** y el **largo de la recámara excede en $2x$ el ancho de la cocina**. El **lado del baño que colinda con la recámara mide una tercera parte del largo de la recámara** y el **ancho del baño es igual al de la cocina**, como se puede advertir en el croquis. Finalmente, el **área de la sala** está dada por la expresión algebraica **$(x^2 + 14x + 48)$** y su **ancho mide $(x + 6)$** .

Para tener una mejor apreciación de los datos que se tienen, es necesario colocarlos en el croquis, como se observa a continuación:



Ahora podemos ver que datos son los que nos faltan y como abordaremos el problema, para resolverlo.

Contesta las siguientes preguntas, y encuentra los valores de las áreas y perímetros que corresponda:

- ¿Explica cómo podemos encontrar la expresión algebraica del perímetro del departamento?
- ¿Explica cómo podemos encontrar la expresión algebraica del área de la cocina?
- ¿Qué operaciones algebraicas utilizamos para determinar el área del comedor?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total del terreno?

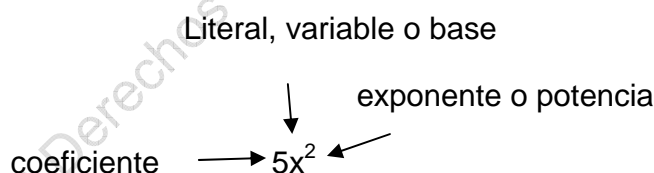
Como puedes observar se resaltó con *cursivas* las variables que intervienen en el problema y con subrayado los datos que tienes que utilizar para resolver cada una de las preguntas planteadas.

Una vez identificadas las variables y los datos, es necesario que previamente aprendas a resolver **operaciones algebraicas**, las cuales son:

1.1 Operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios

Antes de iniciar con las operaciones, es importante que conozcas los siguientes conceptos:

Se denomina **término** a un número o producto de números. Por ejemplo en el término $5x^2$ la parte **literal es x** y la parte del **coeficiente es -5** , el **exponente o potencia** es 2, de tal forma que:



Una expresión consta de uno o más términos, de tal forma que pueden ser monomios o polinomios. Ejemplo:

- Un **Monomio** es una expresión de un solo término: $3x^2$, donde:
 - Un **Polinomio** es una expresión de dos o más términos:
 - Un **Binomio** es una expresión de dos términos: $3x^2 + 5x$
 - Un **Trinomio** es una expresión de tres términos: $3x^2 + 5x + 2$

Los **términos semejantes** son aquellos que tienen los mismos factores literales, cada uno con el mismo exponente y cuyos coeficientes y signos pueden ser diferentes. Por ejemplo $3x^2y$ y $-5x^2y$, son términos semejantes, siendo la parte literal de ambos x^2y , y sus coeficientes y signos son diferentes.

Los **términos no semejantes**, son aquellos que no tienen la misma parte literal. Por ejemplo, $5x^2y$ y $-3xy^2$ no son términos semejantes.

Ahora podemos empezar a resolver las operaciones algebraicas.

1.1.1. Suma-Resta de Monomios

Para **sumar dos o más monomios**, es necesario que conozcas los procedimientos que a continuación se presentan.

- Para **sumar dos o más monomios**, es necesario que cada uno de los términos que se vayan a sumar **sean términos semejantes**, es decir, que **tengan la misma literal elevada al mismo exponente**. Por ejemplo:

$$3 a^2 + 4 a^2 + 5 a^2 = 12 a^2$$

$$-3 a^2 + 4 a^2 + 5 a^2 = 6 a^2$$

- Para **sumar dos o más monomios que no sean términos semejantes**, se suman los términos que puedan ser semejantes y los términos no semejantes se dejan indicados de igual forma. Por ejemplo:

$$3 a^2 + 4 b^2 + 5 a^2 = 8 a^2 + 4 b^2$$

$$-3 a^2 + 4 b^2 + 5 a^2 = 2 a^2 + 4 b^2$$

- Para **sumar dos números del mismo signo**, se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone el mismo signo: Por ejemplo:

$$(+7) + (+3) = 10$$

$$(-7) + (-3) = -10$$

- Para **sumar dos o más números del mismo signo**, se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone el mismo signo: Por ejemplo:

$$(+7) + (+3) + (+10) + (+2) = +22$$

$$(-7) + (-3) + (-10) + (-2) = -22$$

- Para **sumar dos números de signo contrario**, se resta el de menor valor absoluto con el de mayor valor absoluto y **al resultado se le antepone el signo del número de mayor valor absoluto**: Por ejemplo:

$$(+7) + (-4) = +3$$

$$(-7) + (+4) = -3$$

- Para **sumar dos o más números de signo contrario**, se **suman los valores absolutos de aquellos números que tengan el mismo signo**, posteriormente se resta el de menor valor absoluto con el de mayor valor absoluto y **al resultado se le antepone el signo del número de mayor valor absoluto**: Por ejemplo:

$$(+7) + (-3) + (+2) + (-5) = (+9) + (-8) = 1$$

$$(-7) + (+3) + (-2) + (+5) = (-9) + (+8) = -1$$

Ahora observa las siguientes operaciones:

$$1) 5ax^4y^3 + 2ax^4y^3 = 8ax^4y^3$$

$$2) 4ax^4y^3 + x^2y = 4ax^4y^3 + x^2y$$

En el primer caso la resta de monomios se puede realizar, mientras que en el segundo caso la suma no se puede realizar, porque no son términos semejantes y el resultado sería entonces la misma expresión algebraica.

Para **restar dos o más monomios**, es necesario que conozcas los procedimientos que a continuación se presentan.

- Para **restar dos o más monomios**, es necesario que cada uno de los términos que se vayan a restar **sean términos semejantes**, es decir, que **tengan la misma literal elevada al mismo exponente**. Por ejemplo:

$$(3 a^2) - (+4 a^2) - (+5 a^2) = -6 a^2$$

$$(3 a^2) - (+4 a^2) - (-5 a^2) = +8 a^2$$

- Para **restar dos o más monomios que no sean términos semejantes**, se restan los términos que puedan ser semejantes y los términos no semejantes se dejan indicados de igual forma. Por ejemplo:

$$(+ 3 a^2) - (+4 b^2) - (+ 5 a^2) = -2 a^2 - 4 b^2$$

$$(-3 a^2) - (+4 b^2) - (+5 a^2) = -8 a^2 - 4b^2$$

- Para **restar dos números del mismo signo**, se restan sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo del mayor valor absoluto: Por ejemplo:

$$(+7) - (+3) = +10$$

$$(-7) - (-3) = -10$$

Ahora observa las siguientes operaciones:

$$1) 5ax^4y^3 - 2ax^4y^3 = 3ax^4y^3$$

$$2) 4ax^4y^3 - x^2y = 4ax^4y^3 - x^2y$$

En el primer caso la resta de monomios se puede realizar por que son términos semejantes, mientras que en el segundo caso la resta no se puede realizar, porque no son términos semejantes y el resultado sería entonces la misma expresión algebraica.

1.1.2. Multiplicación de Monomios

Se dice que se multiplican monomios, cuando solo existen en forma de factores. Sin importar cuantos sean, es por ello que a continuación veremos algunos casos en los que estos monomios se pueden representar.

- **Para multiplicar exponentes de la misma literal**, se conserva la literal y se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$(x^3)(x^4) = x^{3+4} = x^7$$

$$(a^5)(a)(b)(b^2) = a^{5+1} b^{1+2} = a^6b^3$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

- **Para hallar la potencia de una potencia de una literal**, se conserva dicha literal y se multiplican los exponentes. Por ejemplo:

$$(x^4)^3 = x^{4 \cdot 3} = x^{12}, \text{ ya que } (x^4)^3 = (x^4)(x^4)(x^4)$$

$$(b^2)^4 = b^{2 \cdot 4} = b^8, \text{ ya que } (b^2)^4 = (b^2)(b^2)(b^2)(b^2)$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

- **El orden de los factores no altera el producto** (Propiedad conocida con el nombre de *Propiedad conmutativa de la multiplicación*). Por ejemplo:

$$(3x)(4x^2) = (4x^2)(3x) = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x^2 = 12 x^3$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Para **multiplicar dos números del mismo signo**, se multiplican sus valores absolutos y se antepone el signo más. Por ejemplo:

$$(+5)(+4) = +20 \quad \text{y} \quad (-5)(-4) = +20$$

- Para **multiplicar dos números de signo contrario**, se multiplican sus valores absolutos y se antepone el signo menos. Por ejemplo:

$$(-5)(+4) = -20 \quad \text{y} \quad (+5)(-4) = -20$$

¡RECUERDA!

Al multiplicar dos números del **mismo signo**, el producto es **positivo**; y de **distinto signo**, el producto es **negativo**.

- Para **multiplicar más de dos números**, el **producto es positivo** si todos los números son **positivos**, o bien, si hay un **número par de números enteros negativos**. Por ejemplo:

$$(+5)(+4)(+1)(+2) = +40$$

$$(-5)(-4)(-1)(-2) = +40$$

- Para **multiplicar más de dos números**, el **producto es negativo** si existe un **número impar de números negativos**. Por ejemplo:

$$(+5)(-4)(-1)(-2) = -40$$

¡RECUERDA!

Al multiplicar más de dos números el **producto es positivo**, si **todos los números son positivos** o existe un **número par de números enteros negativos** y el **producto es negativo**, si existe un **número impar de números enteros negativos**.

Es por ello que si multiplicamos dos o más monomios, se multiplican los coeficientes de cada uno de los factores con sus respectivos signos, y las potencias o exponentes de la misma literal se suman, dejando las de distinta literal como están.

Ejemplo:

$$1) (2x^2y^3z^4) (-5xy) (2y^3) = (2)(-5)(2)(x^{2+1})(y^{3+1+3})z^4 \\ = -20x^3y^7z^4$$

$$2) (3ay^2z^3)(2z^2)(4p^3)(a^2yz^2p) = (3)(2)(4)(a^{1+2})(y^{2+1})(p^{3+1})(z^{3+2+2}) \\ = 24a^3y^3p^4z^7$$

1.1.3. División de Monomios

Dos monomios no siempre se pueden dividir de igual forma, es por ello que a continuación veremos algunos casos en los que se pueden presentar.

- Para **dividir dos monomios de la misma base**, se disponen en forma de fracción y si el **exponente del numerador es mayor que el exponente del denominador**, se mantiene la misma base y se **resta el menor exponente del mayor**. Por ejemplo:

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Si a es mayor que b

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

- Para **dividir dos monomios de la misma base**, se disponen en forma de fracción y si el **exponente del numerador es menor que el exponente del denominador**, se mantiene la misma base y se resta el mayor exponente del menor. Por ejemplo:

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Esto es debido a que el recíproco de a^{-1} es $\frac{1}{a}$; por ello se puede expresar de cualquiera de las dos formas

Si a es menor que b

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$$

- Para **dividir dos monomios de la misma base**, se disponen en forma de fracción y si el **exponente del numerador es igual al exponente del denominador**, tenemos entonces un número dividido por sí mismo y el cociente es 1 . Por ejemplo:

$$\frac{x^4}{x^4} = 1$$

Si a es igual en la misma literal, tanto en el numerador, como en el divisor

$$\frac{x^a}{x^a} = 1$$

- Para **dividir dos monomios de distinta base**, se disponen en forma de fracción y el resultado sería la misma expresión algebraica . Por ejemplo:

$$\frac{x^4}{y^2} = \frac{x^4}{y^2}$$

Si las literales son diferentes

$$\frac{x^a}{y^b} = \frac{x^a}{y^b}$$

debido a que las literales son diferentes, no se puede realizar la división y el resultado es la misma expresión algebraica.

- Para dividir dos números del mismo signo, se dividen sus valores absolutos, y se antepone al cociente el signo más. Por ejemplo:

$$\frac{+10}{+2} = +5 \quad \text{y} \quad \frac{-10}{-2} = +5$$

- Para dividir dos números de distinto signo, se dividen sus valores absolutos, y se antepone al cociente el signo menos. Por ejemplo:

$$\frac{+10}{-2} = -5 \quad \text{y} \quad \frac{-10}{+2} = -5$$

¡RECUERDA!

Al dividir dos números enteros, del mismo signo, el cociente es positivo y de distinto signo el cociente es negativo.

A continuación aplicaremos lo aprendido, para resolver los siguientes ejercicios:

$$1) 4ax^4y^3 \div 2x^2y$$

$$\frac{4ax^4y^3}{2x^2y} = 2ax^{4-2}y^{3-1}$$
$$= 2ax^2y^2$$

$$2) 4x^4y \div 2ax^3$$

$$\frac{4x^4y}{2ax^3} = 4 a^{-1} x^{4-3}y$$
$$= 4 a^{-1}xy \text{ ó } \frac{4xy}{a}$$

En el inciso 1) se dividen los coeficientes y los exponentes de las mismas literales se restan, dejando a las de distinta base como están.

Para el inciso 2) podemos observar que los coeficientes se dividen y los exponentes de las mismas literales se restan, dejando las de distinta base como están. En caso de que la literal diferente se encuentre en el denominador, y se quiera expresar en el numerador, entonces tendrá que pasar con potencia negativa, en base a lo explicado anteriormente en donde el recíproco de $\frac{1}{a} = a^{-1}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 13

Para reforzar tu conocimiento resuelve los siguientes ejercicios y el problema que a continuación se presentan, retoma los procedimientos que acabamos de revisar. Recuerda que el practicar estos procedimientos te apoyarán a comprender más fácilmente los temas que veremos más adelante.

1) $2x + 4y + 5x + 8y =$

2) $3x - 4y - 2z - 2x - 5y - 3z =$

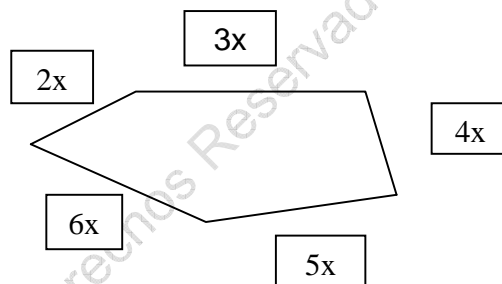
3) $(x^2)(2xy)(x)(-4xy) =$

4) $(4mn)(10m)(2m^2n^2)(3m^3n^2c) =$

5) $\frac{-30x^3y^2}{6x^2} =$

6) $\frac{8x^2y^3}{2xy} =$

PROBLEMA: Se tiene un terreno irregular, cuyas dimensiones se representan en la siguiente figura:



Encuentra la medida de cada uno de los lados del terreno, si su perímetro mide 80 m.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

1) $2x + 4y + 5x + 8y = 7x + 12y$

2) $3x - 4y - 2z - 2x - 5y - 3z = x - 9y - 5z$

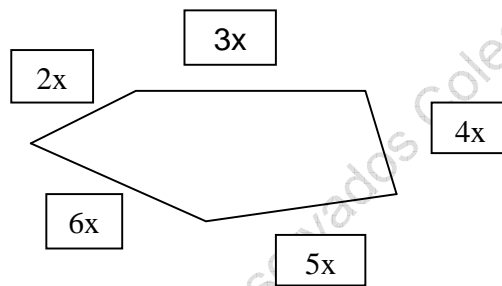
3) $(x^2) (2xy) (x) (-4xy) = -8 x^5 y^2$

4) $(4mn) (10m) (2m^2n^2) (3m^3n^2c) = 240 m^7 n^5 c$

5) $\frac{-30x^3y^2}{6x^2} = -5y^2$

6) $\frac{8x^2y^3}{2xy} = 4xy^2$

SOLUCION DEL PROBLEMA: Se tiene un terreno irregular, cuyas dimensiones se representan en la siguiente figura:



Encuentra la medida de cada uno de los lados del terreno, si su perímetro mide 80 m.

Paso 1. El problema nos pide encontrar las dimensiones del terreno, si su perímetro mide 80m.

Paso 2. El perímetro de cualquier figura es la suma de sus respectivos lados, por lo tanto:

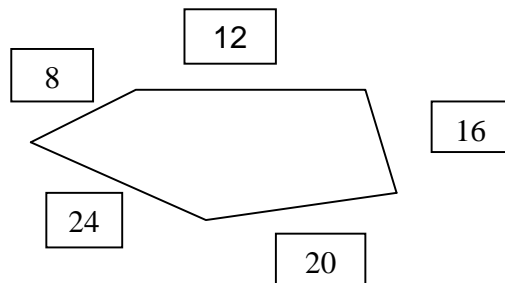
$$(2x) + (3x) + (4x) + (6x) + (5x) = 80\text{ m} \quad , \text{ al sumar los términos semejantes, tenemos:}$$

$20x = 80\text{ m}$, despejando a la variable "x" , podemos encontrar las dimensiones de cada uno de los lados del terreno.

$$x = \frac{80\text{ m}}{20}$$

$$x = 4$$

Al sustituir el valor de “x” , en cada uno de los lados, obtenemos las medidas que buscábamos.



1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

1.1.4. Suma-Resta de Polinomios

La suma-resta de polinomios tiene su base en la de monomios, la cual ya vimos en este tema; para realizarla tenemos que sumar los términos (monomios) que sean semejantes en los polinomios:

Ejemplo: Calcula la suma del siguiente polinomio:

$$a) (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$$

Se recomienda representarla de forma vertical, para ordenar los polinomios, situando los términos semejantes en la misma columna y finalmente hacer la suma.

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\ + \quad 5x^3 - x^2 + 2x \\ \hline 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 0x + 5 \end{array}$$

Para **sumar dos o más polinomios**, se **suman los términos semejantes** de cada uno de ellos. Para el caso de **restar dos o más polinomios**, se procedería de manera similar. Esto es, si en lugar de sumar dos polinomios, se trata de restarlos, bastaría con **cambiar el signo a todos los términos del segundo miembro y sumar los resultados**. Los términos que no sean semejantes simplemente se dejan indicados.

Ejemplo: Para calcular la resta de los polinomios.

$$a) (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)$$

También se recomienda representarla de forma vertical, para ordenar los polinomios, situando los términos semejantes en la misma columna y finalmente hacer la suma.

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\ + \quad -5x^3 + x^2 - 2x \\ \hline 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5 \end{array}$$

¡RECUERDA!

Para **sumar dos o más polinomios**, se **suman los términos semejantes** de cada uno de ellos, tomando en cuenta sus respectivos signos.

Para **restar dos o más polinomios**, bastaría con **cambiar el signo a todos los términos del segundo miembro y sumar los resultados**.

Los **términos que no sean semejantes** simplemente se dejan indicados.

1.1.5. Multiplicación de Polinomios

Para **multiplicar dos o más polinomios**, se tiene que **ordenar cada polinomio, preferentemente de forma decreciente**, después **multiplicar cada término de un polinomio, por todos y cada uno de los términos del otro polinomio y finalmente sumar los términos semejantes**. Por ejemplo:

$$a) (5x^3 - 3x^2 + 2x - 8) (3x^2 - 5x + 4)$$

Se puede ordenar de la siguiente manera y se multiplica término por término, con su respectivo signo.

$$\begin{array}{r}
 5x^3 - 3x^2 + 2x - 8 \\
 \swarrow \quad \uparrow \quad \nearrow \\
 \text{Por } \quad 3x^2 - 5x + 4 \rightarrow \\
 \hline
 15x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 24x^2 \\
 - 25x^4 + 15x^3 - 10x^2 + 40x \\
 \quad 20x^3 - 12x^2 + 8x - 32 \\
 \hline
 15x^5 - 34x^4 + 41x^3 - 46x^2 + 48x - 32
 \end{array}$$

Recordemos que se reducen los términos semejantes.

Otro ejemplo en el cual **no hay reducción de términos semejantes** es el siguiente:

$$b) (5x^4y - 2x^3y^2z + 3x^2z^2 - 8) (x^3 + 2x^2z - 3xy)$$

Podemos representarla de la siguiente manera; se *multiplica término por término, con su respectivo signo*.

$$\begin{array}{r}
 5x^4y - 2x^3y^2z - 8 \\
 \swarrow \quad \nearrow \\
 \text{por } \quad x^3 + 2x^2z \\
 \hline
 5x^7y - 2x^6y^2z - 8x^3 \\
 \quad 10x^6yz - 4x^5y^2z^2 - 16x^2z \\
 \hline
 5x^7y - 2x^6y^2z - 8x^3 + 10x^6yz - 4x^5y^2z^2 - 16x^2z
 \end{array}$$

Como se puede observar en este caso no existen términos semejantes (la misma base elevada a la misma potencia), por lo tanto, no hay reducción de términos.

1.1.6. División de Polinomios

La división de polinomios en general se realiza de forma semejante a la división de monomios, pero antes tenemos que definir los elementos que componen a la División.

El número a dividir, se le llama dividendo.

El número de veces en que se ha de dividir, se le llama divisor.

El resultado de la división, se le llama cociente.

Estos términos se pueden representar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{divide} \quad \longrightarrow \frac{10}{5} = 2 \longleftarrow \text{cociente} \\ \text{diviso} \quad \longrightarrow \end{array}$$

Representado de otra forma: $5 \overline{)10}^2$

Para resolver una **división de polinomios** se requiere que lleves a cabo el siguiente procedimiento:

- Se ordenan los términos pertenecientes al dividendo y al divisor, en base a las potencias de mayor a menos grado, dejando espacio vacío, para los términos cuya potencia no existe.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, dando lugar al primer término del cociente. Se multiplica dicho término por el divisor y se coloca debajo del dividendo con los signos contrarios, cuidando que los términos se coloquen debajo de otro semejante
- Se restan los polinomios obtenidos, dando lugar a otro polinomio de grado menor al inicial.
- Se continúa con el procedimiento hasta que el resto ya no se pueda dividir entre el divisor por ser de menor grado.

Ejemplo:

$$(3x^3 - 2x^2 - 5x - 9) \div (x - 2)$$

En este caso ya están ordenados los términos de mayor a menor potencia.

$$\begin{array}{r}
 X - 2 \overline{) \begin{array}{r} 3x^2 + 4x + 3 \\ 3x^3 - 2x^2 - 5x - 9 \\ -3x^3 + 6x^2 \\ \hline 4x^2 - 5x \\ -4x^2 + 8x \\ \hline 3x - 9 \\ -3x + 6 \\ \hline -3 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

se reducen términos semejantes y se obtiene un nuevo dividendo parcial

se tiene de residuo

Como se ve se ha obtenido de cociente $3x^2 + 4x + 3$ y de residuo -3

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 14

Con los procedimientos revisados anteriormente, realiza los siguientes ejercicios, esto te servirá para reforzar lo aprendido y poder comprender posteriormente la solución de la problemática situada

1) $(-2x^2 - 7x + 4) + (-x^2 + 5x + 1) - (-2x^2 + 7x - 5) =$

2) $(9x^3y - 5x^2y^2 - 3xy^3) + (-8x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3) =$

3) $(a + b - c + d) + (c - a + d - b) - (2b - c + d + a) =$

4) $(x^2 + 8x - 7)(3x) =$

5) $(4xy^3 + 5x^2y^2 - 2x^3y)(2x^2y^2 - 3x^3y) =$

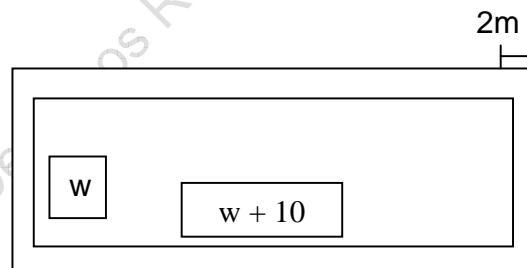
6) $(5x + y - 2)(3x - y) =$

7) $(3x^2 + 14x + 8) \div (x + 4) =$

8) $(-2x^2 - 7x - 6) \div (-x - 2) =$

9) $(6x^4 + 5x^2y - 6y^2) \div (2x^2 + 3y) =$

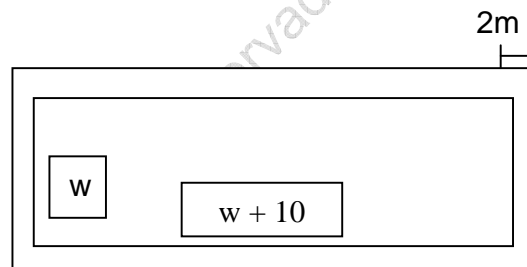
PROBLEMA: Un depósito de agua rectangular cuya figura se muestra a continuación, se usa como criadero de peces y tiene 10m más de largo que de ancho.. Alrededor hay un borde de 2m de ancho. Encuentra las dimensiones del depósito si se sabe que el área del borde alrededor del depósito es de 216m^2 .



AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

- 1) $(-2x^2 - 7x + 4) + (-x^2 + 5x + 1) - (-2x^2 + 7x - 5) = -x^2 - 9x$
- 2) $(9x^3y - 5x^2y^2 - 3xy^3) + (-8x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3) = x^3y - 3x^2y^2 - 7xy^3$
- 3) $(a + b - c + d) + (c - a + d - b) - (2b - c + d + a) = a - 2b + c + d$
- 4) $(x + 8x - 7)(3x) = 3x^3 + 24x^2 - 21x$
- 5) $(4xy^3 + 5x^2y^2 - 2x^3y)(2x^2y^2 - 3x^3y) = 8x^3y^5 - 2x^4y^4 - 19x^5y^3 + 6x^6y^2$
- 6) $(5x + y - 2)(3x - y) = 15x^2 - 6x - 2xy + 2y - y^2$
- 7) $(3x^2 + 14x + 8) \div (x + 4) = 3x + 2$
- 8) $(-2x^2 - 7x - 6) \div (-x - 2) = 2x + 3$
- 9) $(6x^4 + 5x^2y - 6y^2) \div (2x^2 + 3y) = 3x^2 - 2y$

PROBLEMA: Un depósito de agua rectangular cuya figura se muestra a continuación, se usa como criadero de peces y tiene 10m más de largo que de ancho.. Alrededor hay un borde de 2m de ancho. Encuentra las dimensiones del depósito si se sabe que el área del borde alrededor del depósito es de $216m^2$.



Paso 1. El problema pide encontrar las dimensiones (largo y ancho).

Paso 2. Se asigna con w el ancho del depósito en metros.

$w + 10 =$ largo del depósito

$w + 4 =$ ancho + $2m + 2m$ del borde

$w + 14 =$ largo + $2m + 2m$ del borde

Paso 3. El área del borde alrededor del depósito es de $216m^2$, y se puede calcular también como:

$$\begin{array}{rclcl} \text{Área del depósito} & & \text{y} & \text{del borde} & \text{menos} & \text{Área del depósito} \\ (w + 4) & & & (w + 14) & - & w(w + 10) = 216 \end{array}$$

Paso 4. Tenemos que:

$$(w + 4)(w + 14) - w(w + 10) = 216$$

$$(w^2 + 18w + 56) - (w^2 + 10w) = w^2 + 18w + 56 - w^2 - 10w = 216$$

$$8w + 56 = 216$$

$$8w = 160$$

$$w = 20 \text{ ancho}$$

$$w + 10 = 30 \text{ largo}$$

Por lo tanto, las dimensiones del depósito son 20m por 30m.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

1.2 Operaciones de la multiplicación de polinomios y la relación con los productos notables.

En cuanto a las operaciones que corresponden a los productos notables, es necesario que observes la relación que existe entre la multiplicación de polinomios con respecto a las operaciones con productos notables.

A ciertos productos que se pueden obtener de manera directa, sin llevar a cabo la multiplicación por el procedimiento general, se denominan **Productos Notables**. Existen diferentes casos, pero en este apartado solo veremos tres que a continuación se presentan.

1.2.1 Binomio al Cuadrado

Se caracteriza por ser una multiplicación o producto de dos binomios iguales, por ejemplo:

$$\text{a) } (x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+2(x)(y)+(y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$\text{b) } (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = (a)^2-2(a)(b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

La regla de solución para resolver este caso es el siguiente:

- Se eleva al cuadrado el primer término
- Se multiplica el doble del primer término por el segundo
- Se eleva al cuadrado el segundo término

El resultado se puede comprobar, si se multiplica de la siguiente manera:

por
$$\begin{array}{r} x+y \\ \nearrow \quad \nearrow \\ x+y \\ \hline x^2+xy \\ \quad xy+y^2 \\ \hline x^2+2xy+y^2 \end{array}$$

por
$$\begin{array}{r} a-b \\ \nearrow \quad \nearrow \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

Como se ve al final el resultado es el mismo, al igual si se utiliza la regla de solución.

1.2.2 Binomio con Término Común

Se caracteriza por ser una multiplicación o producto de dos binomios, donde el término común es una misma base, por ejemplo:

$$\text{a) } (x+3)(x+2) = x^2+(3+2)(x)+(3)(2) = x^2+5x+6$$

$$\text{b) } (a-4)(a+3) = (a)^2+(-4+3)(x)+(-4)(3) = a^2-a-12$$

La regla de solución para resolver este caso es el siguiente:

- Se eleva al cuadrado el primer término
- Se suman los términos no comunes y se multiplican por el término común
- Se multiplican los términos no comunes

El resultado se puede comprobar, si se multiplica de la siguiente manera:

$$\text{por } \begin{array}{r} x+3 \\ \nearrow \quad \nearrow \\ \hline x+2 \\ \hline x^2+3x \\ \hline 2x+6 \\ \hline x^2+5x+6 \end{array}$$

$$\text{por } \begin{array}{r} a-4 \\ \nearrow \quad \nearrow \\ \hline a+3 \\ \hline a^2-4a \\ \hline 3a-12 \\ \hline a^2-a-12 \end{array}$$

Como se ve al final el resultado es el mismo, al igual si se utilizara la regla de solución.

1.2.3 Binomio Conjugado

Se caracteriza por ser una multiplicación o producto de dos binomios con términos iguales, pero diferenciados uno con el signo más y otro con el signo menos, por ejemplo:

$$\text{a) } (x+3)(x-3) = (x)^2 - (3)^2 = x^2 - 9$$

$$\text{b) } (a+4)(a-4) = (a)^2 - (4)^2 = a^2 - 16$$

La regla de solución para resolver este caso es el siguiente:

- Se eleva al cuadrado el primer término
- Se coloca el signo negativo
- Se eleva al cuadrado el segundo término

El resultado se puede comprobar, si se multiplica de la siguiente manera:

$$\text{por } \begin{array}{r} X+3 \\ \hline x-3 \\ \hline x^2+3x \\ \hline -3x-9 \\ \hline x^2+0x-9 \end{array}$$

$$\text{por } \begin{array}{r} a+4 \\ \hline a-4 \\ \hline a^2+4a \\ \hline -4a-16 \\ \hline a^2+0a-16 \end{array}$$

Como se ve al final el resultado es el mismo, al igual si se utilizara la regla de solución.

Recuerda que los binomios conjugados, son dos binomios iguales que solo se diferencian en el signo. Un binomio es con un signo más y el otro binomio es con un signo menos.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 15

Para seguir ejercitando los procedimientos que necesitas para resolver la problemática inicial, resuelve los siguientes polinomios.

1) $(5x^2 + 9)^2 =$

2) $(x + 6)^2 =$

3) $(5x^2y^2 - 1)2 =$

4) $(x - 7)(x + 5) =$

5) $(10 + x)(-4 + x) =$

6) $(x + 2)(x - 1) =$

7) $(x + 4)(x - 4) =$

8) $(x^m y^m + 1)(x^m y^m - 1) =$

9) $(3m^2n - 5m^3n^2)(3m^2n + 5m^3n^2) =$

PROBLEMA: Una hoja de papel de forma rectangular tenia originalmente 6 cm más de largo que de ancho. Cuando se recorto una banda de 1cm alrededor del rectángulo el área decreció en 68 cm^2 . Encuentre las dimensiones originales del papel.

RESUMEN

Esperando que hayas resuelto correctamente los ejercicios planteados, en este apartado recordaremos las principales reglas para resolver correctamente las distintas operaciones algebraicas.

- SUMA-RESTA
- ✓ Para sumar o restar dos monomios, se requiere que los términos sean semejantes: deben tener las mismas bases elevadas a la misma potencia o exponente.
 - ✓ Para sumar dos o más polinomios se requiere también que los términos sean semejantes. Los términos que se encuentren solos, es decir sin otro término semejante, solo se deja indicado.
 - ✓ Si en lugar de sumar dos polinomios, se trata de restarlos, bastaría con cambiar el signo a todos los términos del segundo miembro y sumar los resultados. Los términos que se encuentren solos se dejan indicados.

- MULTIPLICACIÓN
- ✓ Para multiplicar dos o más monomios, se multiplican los coeficientes cada uno entre sí, y las potencias o exponentes se suman, siempre y cuando tengan la misma base, dejando las de distinta base como están.
 - ✓ Para multiplicar dos o más polinomios, se tienen que multiplicar cada uno de los términos del primer miembro, con cada uno de los términos del segundo miembro con su respectivo signo.

- DIVISIÓN
- ✓ Para la División de Monomios, se dividen los coeficientes y las potencias o exponentes de las mismas bases del dividendo y el divisor se restan, dejando a las de distinta base como están, o bien, tendrán que pasar con potencia negativa, si no se representan en el divisor.
 - ✓ Para la división de polinomios en general se realiza de forma semejante a la división de monomios, pero en este caso se tienen que ordenar tanto el dividendo como el divisor, en base a las potencias de mayor a menor.
 - ✓ Generalmente se dividen polinomios con una sola variable entre el dividendo y el divisor.

**BINOMIO
AL CUADRADO**

- ✓ Debe ser el producto de dos binomios, donde el término común es una base.
- ✓ Se eleva al cuadrado el primer término, después se multiplica el doble del primer término por el segundo, tomando en cuenta los signos, y finalmente Se eleva al cuadrado el segundo término, con su respectivo signo.

**BINOMIO
CON TÉRMINO
COMÚN**

- ✓ Debe ser el producto de dos binomios, exactamente iguales.
- ✓ Se eleva al cuadrado el primer término, después Se suman los términos no comunes por el término común, tomando en cuenta los signos que les correspondan, posteriormente Se multiplican los términos no comunes, respetando los signos de cada uno de dichos términos.

**BINOMIO
CONJUGADO**

- ✓ Debe ser el producto de dos binomios con términos iguales, diferenciados uno con el signo más y otro con el signo menos.
- ✓ Se eleva al cuadrado el primer término, posteriormente Se coloca siempre el signo negativo y después se eleva al cuadrado el segundo término.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

$$1) (5x^2 + 9)^2 = 25x^4 + 90x^2 + 81$$

$$2) (x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$3) (5x^2y^2 - 1)^2 = 25x^4y^4 - 10x^2y^2 + 1$$

$$4) (x - 7)(x + 5) = x^2 - 2x - 35$$

$$5) (10 + x)(-4 + x) = x^2 + 6x - 40$$

$$6) (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$$

$$7) (x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$$

$$8) (x^2y^2 + 1)(x^2y^2 - 1) = x^4y^4 - 1$$

$$9) (3m^2n - 5m^3n^2)(3m^2n + 5m^3n^2) = 9m^4n^2 - 25m^6n^4$$

PROBLEMA: Una hoja de papel de forma rectangular tenía originalmente 6 cm más de largo que de ancho. Cuando se recortó una banda de 1cm alrededor del rectángulo el área decreció en 68 cm². Encuentre las dimensiones originales del papel.

Paso 1. El problema pide encontrar las dimensiones (largo y ancho).

Paso 2. Se asigna con x el ancho del depósito en metros.

x = ancho de la hoja
x + 6 = largo de la hoja

Paso 3. La ecuación es:

$$x(x + 6) - (x - 2)(x + 4) = 68$$

$$x^2 + 6x - (x^2 + 2x - 8) = 68$$

$$4x + 8 = 68$$

$$x = 15$$

Por lo tanto, las dimensiones originales del papel eran de 19 cm de ancho por 25 cm de largo.

2. OPERACIONES DE FACTORIZACIÓN

La **factorización es una operación inversa a la de los productos notables**, es decir, si los productos notables es la multiplicación de binomios, entonces, la factorización generalmente es un trinomio donde debemos obtener el resultado expresado en factores, que son nuevamente los binomios de donde proceden los trinomios formados.

2.1 Por factor común

Está formado generalmente por términos semejantes y en donde todos los términos de la expresión, tienen la misma variable o el mismo número como múltiplo. Se aplica el postulado distributivo. Por ejemplo:

$$a) \quad ax^2 - bx^2 = (x^2)(a-b)$$

$$b) \quad (h+k)x + 2y(h+k) = (h+k)(x+2y)$$

$$c) \quad 6c - 5d + 12ac - 10ad = (6c + 12ac) - (5d + 10ad) = 6c(1+2a) - 5d(1+2a) \\ = (6c - 5d)(1+2a)$$

Se asocio $(6c + 12a)$, ya que se cumple con la relación de factor común, y de igual forma se cumple con factor común en $(5d + 10ad)$

2.2 Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (trinomio cuadrado perfecto)

Está formado generalmente por tres términos, donde el primer término está elevado al cuadrado, el segundo término contiene la o las variables, del primer y segundo término y el tercer término está elevado al cuadrado (no siempre).

a) Trinomio Cuadrado Perfecto

Proviene de un Binomio elevado al cuadrado, ejemplo:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Obsérvese que:

- El primer término tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto proviene de una variable elevada al cuadrado
- El tercer término tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto proviene de un número elevado al cuadrado

- El segundo término es el resultado de multiplicar el doble del primer término (2x), por segundo término.

Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3)$$

La comprobación de la factorización de un trinomio es: Multiplicar los términos del primer binomio, por los términos del segundo binomio y el resultado debe ser el trinomio que se está factorizando.

$$\text{por } \begin{array}{r} x+3 \\ \frac{x+3}{x^2+3x} \\ \frac{3x+9}{x^2+6x+9} \end{array}$$

Existe otro trinomio de la forma $x^2 + bx + c$; donde generalmente el resultado está formado por dos factores de binomios que presentan un término común (la variable "x"), y un término independiente (sin variable). A continuación se ejemplifica dicho método.

b) Trinomio $x^2 + bx + c$, por completación de cuadrados.

Es un trinomio que no es Cuadrado Perfecto, por lo tanto, proviene de un Binomio con término común, ejemplo:

$$x^2 + 5x + 6 =$$

Obsérvese que:

- El primer término tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto proviene de una variable elevada al cuadrado
- El tercer término no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto, no proviene de un trinomio cuadrado perfecto.

Por lo tanto, al factorizar el trinomio obtenemos:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

Donde:

- El primer término que generalmente es la variable, tiene raíz cuadrada exacta, pero
- El tercer término no presenta raíz cuadrada exacta; y es el resultado de la multiplicación de los términos independientes de los binomios.
- El segundo término es la suma-resta de los términos independientes, multiplicado por el término común de los binomios.

La comprobación de la factorización de un trinomio es: Multiplicar cada uno de los términos del primer binomio, por cada uno de los términos del segundo binomio y el resultado debe ser el trinomio que se está factorizando, como se demuestra a continuación.

$$\text{por } \frac{x+2}{x+3} \frac{x^2+2x}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{3x+6}{x^2+5x+6}$$

2.3 Trinomio de la forma ax^2+bx+c

La forma más general del trinomio de segundo grado es ax^2+bx+c . Para factorizar esta expresión se puede recurrir a un procedimiento que consiste en ensayar con diferentes pares de binomios, lo cual resulta ser muy laborioso.

Un procedimiento abreviado y más sencillo es mediante la **Agrupación de Términos**, que además es comprobable a través de la multiplicación de los factores binomios obtenidos, y se explica a continuación:

Ejemplo:

a) Factoriza la expresión $4x^2 + 8x + 3$

El procedimiento consiste en buscar dos números cuyo producto sea 12, el cual proviene de multiplicar el coeficiente del primer término por el tercer término; y cuya suma sea 8, que es el coeficiente del segundo término.

Como el producto y la suma son positivos, entonces los dos números buscados son positivos.

Los factores de 12 son (12)(1), (3)(4) y (6)(2), Los únicos factores que sumados nos pueden dar 8 son 6 y 2. Con estos números, el polinomio se puede escribir así:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 3 &= 4x^2 + 6x + 2x + 3 \\ &= (4x^2 + 6x) + (2x + 3) \\ &= 2x(2x + 3) + 1(2x + 3) \end{aligned}$$

Tomando a $2x + 3$ como factor común, se obtiene:

$$4x^2 + 8x + 3 = (2x + 1)(2x + 3)$$

Realizando la comprobación, tenemos que:

$$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 6x + 2x + 3 = 4x^2 + 8x + 3$$

Otro ejemplo, puede ser:

b) Factoriza la expresión $6x^2 + 5x - 4$

En este caso se deben buscar dos números cuyo producto sea -24, el cual proviene de multiplicar el coeficiente del primer término por el tercer término; y cuya suma sea +5

El que su producto sea negativo, significa que sus factores tienen signo diferente y para que la suma sea positiva se requiere que el factor con mayor valor absoluto sea positivo.

Los factores de -24 son: (24)(-1), (12)(-2), (8)(-3), (6)(-4).

Los únicos factores cuya suma es +5 son (8) y (-3). Con estos números, el polinomio se puede escribir así:

$$\begin{aligned}6x^2 + 5x - 4 &= 6x^2 + 8x - 3x - 4 \\ &= (6x^2 + 8x) - (3x + 4) \\ &= 2x(3x + 4) - (3x + 4)\end{aligned}$$

Tomando a $(3x + 4)$ como factor común, resulta:

$$6x^2 + 5x - 4 = (2x - 1)(3x + 4)$$

Haciendo la comprobación:

$$\text{por } \begin{array}{r} 2x - 1 \\ \underline{3x + 4} \\ 6x^2 - 3x \\ \underline{8x - 4} \\ 6x^2 + 5x - 4 \end{array}$$

De esta forma se puede comprobar que los binomios corresponden al trinomio planteado.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 16

Como te habrás dado cuenta, hasta este momento hemos revisado los procedimientos para resolver diversos tipos de trinomios, este apartado tiene como objetivo que refuerces lo aprendido, aplicando estos conocimientos en otros ejercicios:

1) $10 a^2b - 15 ab^2 + 5 ab =$

2) $8 x^4y^4 + 10 x^3y^3 - 6 x^2y^2 =$

3) $3 a^3b^3c^3 + 6 a^2b^2c^2 + 9 abc =$

4) $x^2 + 10x + 25 =$

5) $x^2 - 12x + 36 =$

6) $x^2 + 22x + 121 =$

7) $x^2 + 8x + 15 =$

8) $x^2 - 7x - 18 =$

9) $x^2 - 13x + 36 =$

10) $4x^2 + 12x + 3 =$

11) $2x^2 + 5x + 3 =$

12) $12x^2 - 7x + 1 =$

PROBLEMA: Un pequeño agricultor cosechó 50 kilogramos de espárragos en un sembradío y los puede vender a razón de 40 pesos por kilogramo en este momento. Por cada semana que espere, su cosecha aumentará 10 kilogramos y el precio del kilogramo bajará 4 pesos. ¿En qué semana debe vender para obtener 2,160 pesos?

RESUMEN

A continuación haremos un breve resumen de los procedimientos que aplicamos en cada uno de los contenidos de factorización.

FACTORIZACIÓN POR FACTOR COMÚN:		
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Esta formado generalmente por <i>términos (dos o más)</i>, donde tienen una o más variables iguales y sus coeficientes generalmente son múltiplos. ✓ Para factorizarlos se requiere <i>utilizar la propiedad distributiva</i>, que nos permita asociar factores comunes y respetar los signos. 		
TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$ (Trinomio cuadrado perfecto)	TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$ POR (completación de cuadrados)	TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$, POR (agrupación de términos)
<p>Debe estar formado por <i>tres términos</i>, donde:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ El <i>primer</i> y <i>tercer</i> término tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto proviene de una variable elevada al cuadrado. ✓ El coeficiente del <i>segundo</i> término es el resultado de multiplicar el doble del primer término ($2x$), por segundo término proveniente de la raíz cuadrada del tercer término. ✓ Los factores que se deben obtener, son <i>binomios exactamente iguales en términos y signos</i>. 	<p>Debe ser un <i>trinomio que no es Cuadrado Perfecto</i>, por lo tanto, proviene de un <i>Binomio con término comú.</i>, donde:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ El <i>primer</i> término tiene raíz cuadrada exacta, ✓ El coeficiente del <i>segundo</i> término es el resultado de sumar-restar los términos no comunes y después multiplicarlo por el término común, respetando los signos de dichos términos. ✓ El <i>tercer</i> término no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto proviene de la multiplicación de los términos no comunes, respetando sus respectivos signos. ✓ Los factores que se deben obtener, son binomios con un término común, el cual contiene a la variable. 	<p>Es un Trinomio donde $a > 1$ donde:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Se buscan dos números cuyo producto sea el resultado de multiplicar el coeficiente del término cuadrático con el coeficiente del término independiente, y cuya suma sea el coeficiente del segundo término. ✓ Si el producto y la suma son positivos entonces, los dos números buscados son positivos, si son negativos entonces, uno será positivo (menor) y el otro negativo (mayor) ✓ Si el producto es positivo y la suma es negativa entonces, los dos números buscados son negativos; si por el contrario, el primero es negativo y la segunda positiva entonces, un número será positivo (mayor) y el otro negativo (menor). ✓ Los factores que se deben obtener, son binomios con un término común, que generalmente dicho término contiene a la variable. ✓ Después de comprobar la operación, se agrupan los términos, para obtener factores comunes y se agrupan con los no comunes, para obtener los binomios que dan solución a la factorización.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

- 1) $10 a^2b - 15 ab^2 + 5 ab = 5ab (2 a - 3 + 1)$
- 2) $8 x^4y^4 + 10 x^3y^3 - 6 x^2y^2 = 2x^2y^2 (4x^2y^2 + 5xy - 3)$
- 3) $3 a^3b^3c^3 + 6 a^2b^2c^2 + 9 abc = 3abc (a^2b^2c^2 + 2abc + 3)$
- 4) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5) (x + 5) = (x + 5)^2$
- 5) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6) (x - 6) = (x - 6)^2$
- 6) $x^2 + 22x + 121 = (x + 11) (x + 11) = (x + 11)^2$
- 7) $x^2 + 8x + 15 = (x + 3) (x + 5)$
- 8) $x^2 - 7x - 18 = (x + 2) (x - 9)$
- 9) $x^2 - 13x + 36 = (x - 4) (x - 9)$
- 10) $4x^2 + 12x + 3 = (4x + 1) (x + 3)$
- 11) $2x^2 + 5x + 3 = (x + 2) (x + 3)$
- 12) $12x^2 - 7x + 1 = (x - 12) (x + 3)$

PROBLEMA: Un pequeño agricultor cosechó 50 kilogramos de espárragos en un sembradío y los puede vender a razón de 40 pesos por kilogramo en este momento. Por cada semana que espere, su cosecha aumentará 10 kilogramos y el precio del kilogramo bajará 4 pesos. ¿En qué semana debe vender para obtener 2,160 pesos?

Paso 1. El problema pide el momento en el que se tiene que vender para obtener 2,160 pesos.

Paso2.

t = número de semanas, este es el número que se debe encontrar para obtener 2,160 pesos

Paso 3. Después de una semana se tendrá 50 + 10 Kg de espárragos, la segunda 50 + (10)2 Kg. De espárragos, la tercera 50 + (10)3 Kg. De espárragos, en general en la semana t, se tendrá 50 + (10)t Kg de espárragos.

Paso 4. Se establece la ecuación:

$$\begin{array}{l} \text{Peso} \\ (50 + 10t) = \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{precio} \\ (40 - 4t) = \end{array} \quad 2,160$$

Paso 5.

$$\begin{aligned}(50 + 10t)(40 - 4t) &= 2,160 \\ 2000 - 200t - 400t - 40t^2 &= 2,160 \\ 2000 + 200t - 40t^2 &= 2160 \\ -2160 + 2000 + 200t - 40t^2 &= 0 \\ -160 + 200t - 40t^2 &= 0\end{aligned}$$

Factorizar:

$$\begin{aligned}-40(4 - 5t + t^2) &= 0 \\ 40(t - 1)(t - 4) &= 0 \\ t - 1 &= 0 & t - 4 &= 0 \\ t &= 1 & t &= 4\end{aligned}$$

Si el agricultor vende en la primera o en la cuarta semana tendrá 2160

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

3. OPERACIÓN Y SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una vez que hayas comprendido los temas anteriores (operaciones con polinomios, productos notables y factorización), podrás ahora entender cómo se realizan las **Simplificaciones Algebraicas**, ya que para ello requieres forzosamente aplicar lo estudiado en cada uno de los temas anteriores.

La simplificación de fracciones algebraicas, se refiere a la reducción de una expresión algebraica, que generalmente son polinomios, y en donde tendrás que aplicar tus conocimientos nuevos de Operaciones con polinomios, Productos Notables y Factorización, entonces:

Una Fracción Algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad Q(x) \neq 0$$

De tal forma que para **Simplificar una Fracción Algebraica**, se divide el numerador y el denominador de la fracción por un Polinomio que sea factor común de ambos.

Por ejemplo:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

Como se puede observar en este ejemplo, el numerador es un **Trinomio Cuadrado Perfecto**, ya que su primer y tercer término presentan raíz cuadrada exacta, por lo tanto lo podemos factorizar a un **Binomio al Cuadrado**. En el caso del denominador observa que solo son dos términos que presentan raíz cuadrada exacta y que están separados con un signo menos, por lo tanto recordemos que según las características este binomio proviene, de un Producto Notable, llamado Binomio Conjugado, es por ello que al factorizarlo coinciden un factor del numerador con un factor del denominador, al **simplificarlo**, obtenemos la unidad y como resultado y dejamos expresados aquellos factores que no son iguales.

Como podrás observar estamos aplicando los conocimientos adquiridos de Factorización.

Otros ejemplos de Simplificación de Fracciones Algebraicas son:

$$a) \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} = \frac{x(x-3)}{x(x+3)} = \frac{(x-3)}{(x+3)}$$

En este caso para simplificar la expresión, tanto en el numerador como en el denominador, se aplica la factorización por término común y al quedarnos la variable "x", multiplicando a un factor en el numerador como en el denominador, entonces, podemos simplificarlo y nos da la unidad. Finalmente se dejan expresados los factores que no son iguales.

$$b) \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{(x+2)}{(x^2-1)}$$

En el numerador podemos observar que se trata de un **Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c$** ; y como el término independiente no tiene raíz cuadrada exacta, entonces se procede a **factorizarlo por Completación de Cuadrados**. Para el caso del denominador, podemos observar que no se trata de un trinomio, sino, de un **polinomio**, por lo tanto, podemos factorizarlo en términos, pero si observamos detenidamente, nos damos cuenta que **$x^2 - x + 1$ es un Trinomio Cuadrado Perfecto**, por lo tanto el otro factor podría ser **$(x - 1)$** , donde al multiplicarlo nos da el polinomio original.

Posteriormente separamos en factores y procedemos a **Simplificar $(x - 1)$** , tanto del numerador como del denominador y **obtenemos la unidad**, pero si observas detenidamente en el denominador tenemos un **Binomio Conjugado** y lo podemos separar en factores **$(x - 1) \cdot (x + 1)$** , pero ninguno de estos factores es igual con el factor del numerador, por lo cual, no es posible simplificar más la Expresión Algebraica y entonces, los factores que no son iguales se quedan expresados finalmente.

$$c) \frac{x^2-3x}{3-x} = \frac{x(x-3)}{3-x} = \frac{-x(x-3)}{-3+x} = -x$$

Para este ejemplo, podemos identificar que en el numerador se tiene un **binomio que podemos factorizar por término común** y para el caso del denominador, **no podemos aplicar ninguna factorización**, porque, el binomio no tiene ningún término común, por lo cual, requerimos formar factores iguales en el numerador y denominador que nos permitan simplificar la expresión algebraica, es por ello que tenemos que multiplicar a toda la fracción algebraica por (-1) , para formar factores iguales, tanto en el numerador como en el denominador.

Después podemos simplificar los factores $(x - 3)$, para obtener la unidad y todo número multiplicado por la unidad, nos da el mismo número, es por ello que el resultado es $-x$

$$d) \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{(x-2)}{(x-4)}$$

En este ejercicio observamos que en el numerador se tiene un Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$; pero el término independiente no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto, podemos factorizarlo Completando Cuadrados. Para el caso del denominador tenemos la misma situación, se trata de un Trinomio donde el término independiente no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto, aplicamos la misma factorización.

Separamos en factores los trinomios, tanto del numerador como del denominador y obtenemos factores iguales, que en este caso es $(x - 3)$; lo cual al dividirse nos da la unidad y todo número multiplicado por la unidad, nos da el mismo número. De tal forma, que nos

quedan los factores que no son iguales y son esos mismos los que quedan expresados como resultado final.

SOLUCIÓN DE PROBLEMÁTICA SITUADA

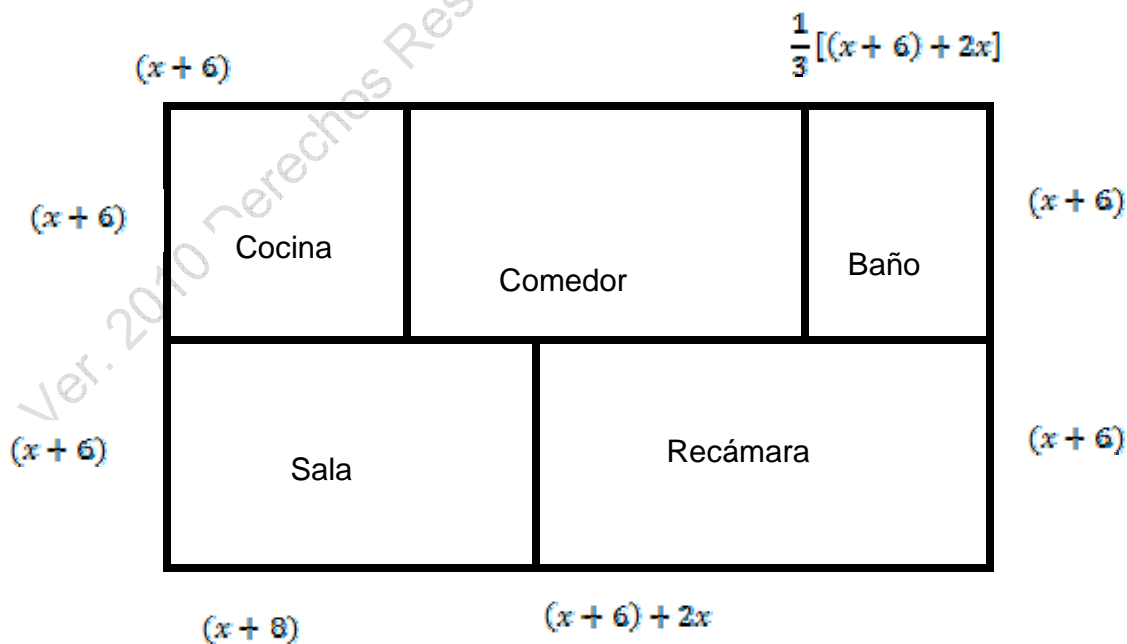
Una vez que hayas aprendido a resolver las diversas Operaciones Algebraicas (Operaciones con polinomios, productos notables y factorización), podremos resolver las preguntas de la problemática antes planteada:

- a) ¿Explica cómo podemos encontrar la expresión algebraica del perímetro del departamento?

Para obtener el perímetro del departamento, tenemos que sumar los lados pertenecientes a cada una de las secciones del departamento, por lo tanto, tenemos que:

- La cocina mide de lado: $(x + 6)$, tanto de ancho como de largo
- El comedor mide: No tenemos el dato
- El baño mide: $(x + 6)$ de ancho, que es el mismo que la cocina y de largo mide $\frac{1}{3} [(x + 6) + 2x]$, que es una tercera parte de la Recámara.
- La sala mide: $(x + 6)$ de ancho y su área está dada por la expresión: $x^2 + 14x + 48$, por lo tanto tendremos que factorizar, para obtener el largo.
- La recámara mide: $(x + 6)$ que es el mismo ancho que la cocina, y excede en su largo a la cocina en $2x$, por lo tanto su largo mide...

Para que comprendas mejor las expresiones matemáticas, vamos a colocar los datos sobre el croquis del departamento:



Recordemos que para obtener el largo de la sala se requiere factorizar el valor del área, cuya expresión algebraica es:

$$x^2 + 14x + 48$$

Primero identificamos que es un trinomio de la forma x^2+bx+c pero el tercer término no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto, no se trata de un Trinomio Cuadrado Perfecto, entonces buscamos dos factores donde los términos independientes al multiplicarse nos den 48 y al sumarse den 14, y obtenemos que $(x + 6)$ y $(x + 8)$ son los factores que buscamos, porque al multiplicarlos, obtenemos:

$$\text{por } \frac{\begin{array}{r} x+6 \\ x+8 \\ \hline x^2 + 6x \\ + 8x + 48 \\ \hline x^2 + 14x + 48 \end{array}}$$

como el ancho de la sala $(x+6)$, ya lo conocíamos, entonces el largo mide: $(x+8)$.

En cuanto al comedor no tenemos ningún dato, pero si observamos la figura nos podemos dar cuenta que el ancho debe medir lo mismo que la cocina y el baño, pero el largo de la recamara, más la del baño, más la de la cocina debe ser igual a la “suma del largo de la recamara y de la sala”, por lo tanto; si sumamos dichas medidas obtenemos que:

$$\begin{array}{r} x+8 \quad \text{largo de la sala} \\ + \frac{3x+6}{4x+14} \quad \text{largo de la Recamara al sumar: } (x+6)+2x \end{array}$$

Entonces, al sumar el largo de la cocina, el largo del baño, más el largo del comedor como incógnita (Y), podemos igualarla con el largo de la sala y la de la recamara, para después despejar la incógnita y obtener el largo del comedor, así tenemos que:

$$(x + 6) + \frac{1}{3} [(x + 6) + 2x] + y = (x + 8) + [(x + 6) + 2x]$$

Al simplificar términos semejantes y resolver las sumas de la ecuación, obtenemos:

$$x + 6 + \frac{3x}{3} + \frac{6}{3} + y = x + 8 + x + 6 + 2x$$

$$2x + 8 + y = 4x + 14$$

Despejando a la incógnita y, que representa el largo del comedor, tenemos que:

$$y = 4x + 14 - 2x - 8$$

$y = 2x + 6$, es el valor del largo del comedor.

Ahora podremos obtener la expresión algebraica que determina el valor del Perímetro del Departamento.

Como ya sabemos, para obtener el Perímetro de cualquier figura geométrica, se tienen que sumar todos los lados, de tal forma que:

Perímetro = (largo de la cocina + largo del comedor + largo del baño + largo de la sala + largo de la recamara) + (ancho de la cocina + ancho de la sala + ancho del baño + ancho de la recamara)

Al sustituir los valores en el mismo orden en el que se escribieron, nos queda:

Perímetro:

$$[(x + 6) + (2x + 6) + (x + 2) + (x + 8) + (3x + 6)] + [(x + 6) + (x + 6) + (x + 6) + (x + 6)]$$

$$\text{Perímetro} = (8x + 28) + (4x + 24)$$

$$\text{Perímetro} = 12x + 52$$

Esta es la expresión algebraica que nos permitirá encontrar el Perímetro del Departamento, al sustituir en la variable "x", cualquier valor positivo que le asignemos.

Ahora resolveremos la siguiente pregunta:

b) ¿Explica cómo podemos encontrar la expresión algebraica del área de la cocina?

Sabemos que el área de cualquier cuadrado es lado por lado, o sea, $(l \cdot l) = (l^2)$, por lo tanto, al multiplicar cada dos de sus lados, obtenemos el área que se nos pide, de tal forma que:

Ancho de la cocina: $(x+6)$

Largo de la cocina: $(x+6)$

Al multiplicar nos queda:

$$(x+6)(x+6) = (x+6)^2 \quad (\text{Binomio al cuadrado})$$

Recordemos que un Binomio al Cuadrado es un **producto notable** y para resolverlo de la forma en la que aprendimos, tenemos que:

$$(x+6)^2 = (x)^2 + 2(x)(6) + (6)^2 = x^2 + 12x + 36, \text{ por lo tanto, el área es:}$$

$$\text{Área cocina} = x^2 + 12x + 36$$

Donde la variable "x" recibe cualquier valor positivo que se le asigne.

La siguiente pregunta es:

c) ¿Qué operaciones algebraicas utilizamos para determinar el área del comedor?

Identifiquemos que el comedor no es un cuadrado, sino que es un RECTANGULO, por lo tanto, el área de cualquier rectángulo es:

$$(\text{largo}) (\text{ancho}) = (x+2) (x+6) \quad \text{Es un Binomio con Término Común}$$

Se caracteriza por ser una multiplicación o producto de dos binomios, donde el término común es una misma base, y se resuelve de la siguiente manera:

$$(x+2) (x+6) = (x)^2 + (2+6)(x) + (2) (6) = x^2 + 8x + 12$$

El área del comedor es:

$$\text{Área comedor} = x^2 + 8x + 12$$

Donde la variable “x” recibe cualquier valor positivo que se le asigne y las operaciones algebraicas que se utilizaron fueron:

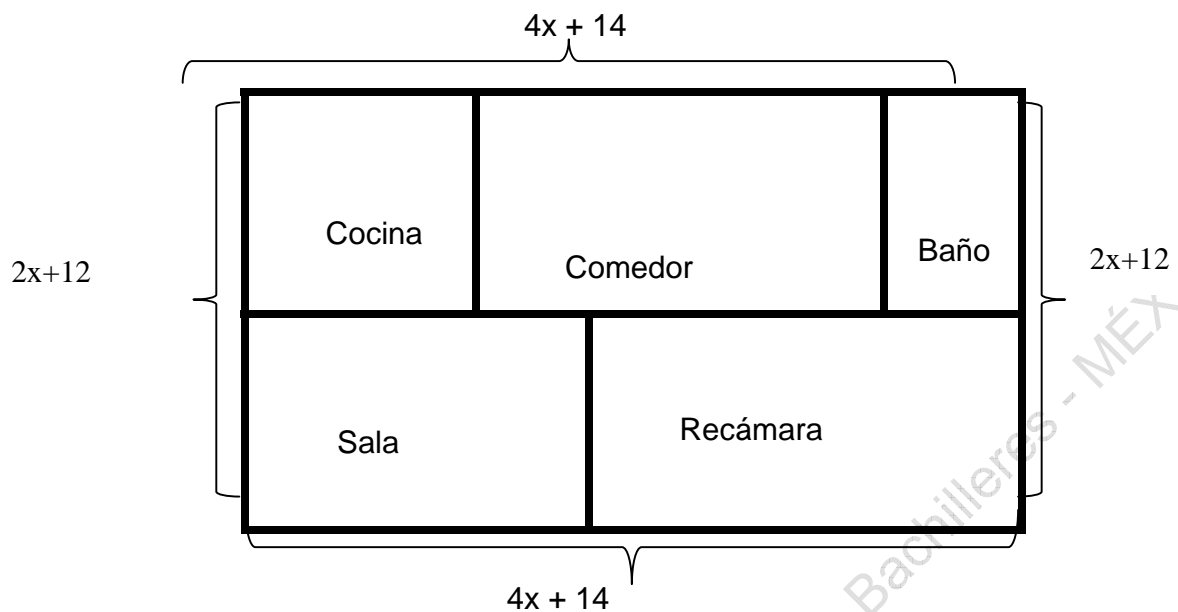
- ✓ Multiplicación de Binomios
- ✓ Productos Notables

La siguiente pregunta es:

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total del terreno?

Para obtener la expresión algebraica del área del terreno, identifiquemos primero que tanto la figura del departamento, así como las expresiones algebraicas que obtuvimos al obtener el Perímetro, nos demuestran que el departamento tiene una figura **rectangular**, es por ello que aplicaremos la fórmula de área de un **rectángulo**, que es:

(Largo) (ancho), para ello representaremos el croquis del departamento, con sus lados de una manera más simplificada, por ejemplo:



Por lo tanto, el área total del terreno del departamento es:

$$\text{Área del terreno} = (2x+12)(4x+14) = 8x^2 + 76x + 168$$

La expresión algebraica que representa el área del terreno es:

$$\text{Área del terreno: } 8x^2 + 76x + 168$$

Como podemos ver se trata de un Trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$, donde la variable "x" recibe cualquier valor positivo que se le asigne.

Como puedes observar en el desarrollo de cada uno de los incisos se manejaron los conocimientos previos que habías desarrollado de Operaciones Algebraicas, Productos Notables, Factorización y Simplificaciones de Fracciones Algebraicas.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 17

Con este último tema revisamos todo los conceptos y procedimientos necesarios para resolver la problemática que se presentó al inicio de este bloque, pero antes de analizar su solución, aplica lo que acabas de aprender realizando los siguientes ejercicios.

$$1) \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} =$$

$$2) \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1} =$$

$$3) \frac{5a^2x^2}{10a^3y^3} =$$

$$4) \frac{a - b}{2b - 2a} =$$

$$5) \frac{x - 4}{x^2 - 7x + 12} =$$

PROBLEMA: Pablo entrenó para una carrera de bicicletas, pedaleando a 12 Km / h al subir a la montaña y a 30 Km/h al bajar. El entrenamiento duró 3 ½ h., éste empezó y terminó en el mismo punto. ¿Cuánto tiempo tardó Pablo en subirla montaña y cuántos kilometro recorrió?

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

$$1) \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$2) \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 - a + 1}{a + 1}$$

$$3) \frac{5a^2x^2}{10a^3y^3} = \frac{x^2}{2ay^3}$$

$$4) \frac{a-b}{2b-2a} = \frac{-1}{2}$$

$$5) \frac{x-4}{x^2-7x+12} = \frac{1}{x-3}$$

PROBLEMA: Pablo entrenó para una carrera de bicicletas, pedaleando a 12 Km / h al subir a la montaña y a 30 Km/h al bajar. El entrenamiento duro $3\frac{1}{2}$ h., éste empezó y terminó en el mismo punto. ¿Cuánto tiempo tardó Pablo en subirla montaña y cuántos kilometro recorrió?

Paso 1. El problema pide que se encuentre un tiempo y una distancia.

Paso 2.

Sean $t =$ tiempo en horas para subir a la montaña. El tiempo de entrenamiento fue de $3\frac{1}{2}$ horas, es decir, $\frac{7}{2}$ horas, así que:

$\frac{7}{2} - t =$ tiempo en hora para bajar la montaña

$\frac{7}{2} - t =$ tiempo en hora para bajar la montaña

Paso 3. La distancia recorrida de subida y la distancia recorrida de bajada es la misma

Paso 4. Resolver la ecuación

$$12t = 30 \left[\frac{7}{2} - t \right] - 30t$$

$$12t + 30t = 105$$

$$42t = 105$$

$$t = \frac{105}{42} = 2 + \frac{21}{42}$$

$$t = 2\frac{1}{2} \text{ horas}$$

La distancia recorrida es:

$$12 \left[2 + \frac{1}{2} \right] = 24 + 6 = 30 \text{ Km}$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

RESUMEN

Ahora haremos un breve resumen de las diversas operaciones que se deben aplicar para resolver la Simplificación de Fracciones Algebraicas, que te permitan obtener el resultado de forma más sencilla, rápida y correcta.

- ✓ Para resolver cualquier **Fracción Algebraica y Simplificarla**, es necesario que **identifiques primero el tipo de monomio o polinomio** que se encuentra tanto en el numerador, como en el denominador
- ✓ Una vez identificado, debes factorizarlo por el método que le corresponda, según el polinomio, para después representarlo en factores.
- ✓ Una vez expresado en factores es necesario, que por lo menos un factor sea igual, tanto en el numerador como en el denominador para poder simplificarlo
- ✓ Recuerda que para simplificar es necesario que observes que los factores se encuentren multiplicándose entre sí, de lo contrario no podrás simplificarlos.
- ✓ Finalmente colocas los factores que no sean iguales, tanto en el numerador como denominador de la Expresión Algebraica y si ya no se pueden seguir reduciendo, entonces ese será el resultado.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colección de Ejercicios - MÉXICO

RECAPITULACIÓN

Para sintetizar lo aprendido, podemos concluir que para aplicar el álgebra, es necesario que entiendas la relación que guardan cada uno de los siguientes procedimientos algebraicos:

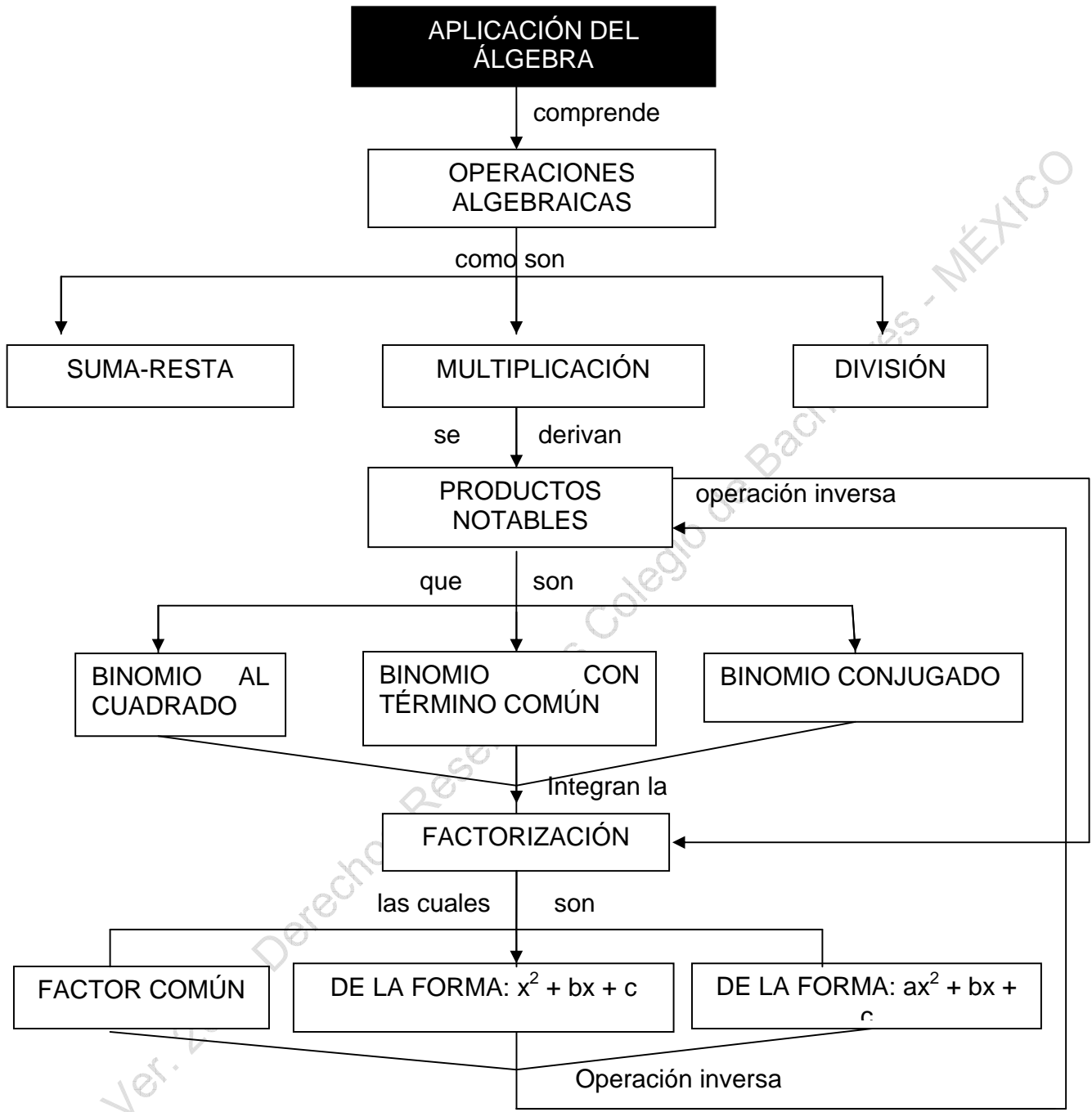
- Operaciones Algebraicas** {
 - Operaciones de suma, resta, multiplicación y división de Polinomios
 - Operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios.

- Productos Notables** {
 - Binomio al Cuadrado
 - Binomio con Término Común
 - Binomio Conjugado

- Factorización** {
 - Factor Común
 - Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c$
 - Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$

- Simplificación de Fracciones Algebraicas** {
 - Factorización
 - Productos notables.

Para entender la relación que cada **NÚCLEO TEMÁTICO** tiene entre sí, lo vamos a representar de la siguiente manera:



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

¡Ahora te toca a ti! Vamos a resolver una problemática donde aplicarás todo lo que aprendiste en este bloque, recuerda que si tienes dudas en cuanto a su solución puedes regresar y revisar los procedimientos que realizamos en los temas anteriores.

Una vez que hayas concluido, en el siguiente apartado puedes analizar la forma como resolviste el problema.

El Kinder de Marlen

Marlen quiere construir un Kinder en un terreno rectangular, con base al croquis que se muestra abajo y cuyas medidas están dadas en expresiones algebraicas, que son las siguientes: la cocina es cuadrada y mide $(x + 5)$ de lado, el comedor tiene el mismo ancho que la cocina, el baño de los niños y niñas, tienen el mismo largo que la cocina y el área de cada baño esta dada por la expresión algebraica $x^2 + 9x + 20$.

El estacionamiento tiene de ancho $(x + 2)$ y el largo excede en $3x$ el ancho de la cocina; los salones que en total son tres, tienen cada uno de largo una tercera parte de la expresión $(3x + 9)$ y de ancho cada uno mide lo mismo que la cocina, y de área tienen cada uno esta representado por la expresión algebraica $x^2 + 8x + 15$; la sala de juntas y de oficinas miden de ancho la mitad de la expresión $(2x + 6)$ y de largo las dos terceras partes del largo total de los salones, que es $(3x + 9)$.

El Jardín y área de juegos mide de ancho lo mismo que el estacionamiento y de largo mide la diferencia del largo total del Kinder, menos el largo del Estacionamiento. El patio excede en $3x$ el largo del comedor y de ancho es la suma del ancho de cada baño. Finalmente el comedor tiene el mismo ancho que la cocina y el largo esta dado por la expresión $(2x + 2)$.



Contesta las siguientes preguntas, y encuentra los valores de todos los anchos y largos de cada una de las secciones del Kinder; para que puedas resolverlas. Realiza las operaciones en tu cuaderno.

- a) ¿Explica cómo podemos encontrar la expresión algebraica y el valor total del perímetro del Kinder?
- b) ¿Explica cómo podemos encontrar la expresión algebraica del área de la cocina?
- c) ¿Qué operaciones algebraicas utilizamos para determinar el área del comedor?
- d) ¿Cuál es el valor y la expresión algebraica que representa el área total del terreno?
- e) ¿Cuáles son los valores de todas las áreas y perímetros de cada una de las secciones que tiene el Kinder?
- f) ¿Qué operaciones algebraicas utilizaste para resolver cada uno de los incisos anteriores?

Para que verifiques que tus respuestas hayan sido correctas, revisa el siguiente apartado denominado Autoevaluación.

AUTOEVALUACIÓN

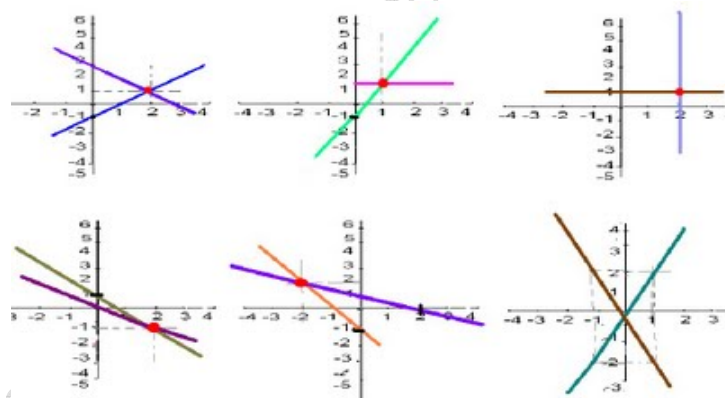
¿No tuviste problemas para realizar la Actividad de Consolidación? Para valorar tu desempeño, autoevalúate con la siguiente rúbrica.

CATEGORÍA	Excelente	Bueno	Regular
Procedimientos	El proceso de solución lo realizaste de manera ordenada, de tal manera que una operación te llevaba a otra sin ningún problema.	El proceso de solución lo realizaste de forma ordenada, aunque algunas veces tuviste que revisar algunas operaciones por que el resultado no concordaba con lo solicitado.	El proceso de solución fue un poco confuso, en la mayoría de las ocasiones regresaste a la explicación de los temas para continuar con las siguientes operaciones.
Terminología matemática y notación	La terminología y notación se utilizaron de forma adecuada para hacer más fácil de comprender el resultado.	La terminología y notación, por lo general, se utilizaron de forma adecuada e hicieron comprensible el resultado.	La terminología y notación, no fueron utilizadas de manera adecuada por lo que es confuso el resultado.
Errores	Del 90 al 100% de los pasos y soluciones no presentaron errores matemáticos.	Casi todos (80-89%) los pasos y soluciones no presentaron errores matemáticos.	La mayor parte (70-80%) de los pasos y soluciones no presentaron errores matemáticos.
Conclusión	Sabes argumentar el por qué de todas las operaciones que realizaste y los resultados que obtuviste.	Sabes argumentar el por qué de algunas operaciones y explicar de forma general los resultados.	Sabes explicar los resultados que obtuviste, pero no el proceso que seguiste.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

BLOQUE TEMÁTICO TRES

MODELO DE ECUACIONES



Autor: Jorge Granados Cáliz

Asesor Pedagógico: Dora María Mireles Alvarado

1ra. Ver. 2010 Dr

BLOQUE TEMÁTICO TRES MODELO DE ECUACIONES

PROPÓSITO

1. Construcción de modelos matemáticos basados en problemas de diversos campos

1.1 Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita

1.1.1 Solución de Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita por el Método Algebraico

Actividad de Aprendizaje 18

1.1.2 Interpretación Gráfica de una Ecuación de Primer Grado utilizando dos incógnitas.

Actividad de Aprendizaje 19

Resumen

1.2 Métodos de Solución de Sistemas de Ecuaciones con dos incógnitas

1.2.1 Método Gráfico

1.2.2 Método de Eliminación por Suma y Resta

1.2.3 Método de Eliminación por Sustitución

1.2.4 Método de Eliminación por Igualación

1.2.5 Método por Determinantes

Actividad de Aprendizaje 20

Resumen

1.3 Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con tres incógnitas

Actividad de Aprendizaje 21

Resumen

RECAPITULACIÓN

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

AUTOEVALUACIÓN

PROPÓSITO

¿Qué vas a lograr?

- Serás capaz de argumentar, de acuerdo a tus conocimientos y habilidades, la solución de problemáticas situadas y generar relaciones entre éstas y los modelos algebraicos.
- Interpretar y relacionar los elementos medulares de un problema.

¿Qué conocimientos desarrollarás?

A construir y explicar modelos matemáticos basados en problemas de diversos campos,

¿Cómo lo vas a realizar?

- Identificando las variables y la relación entre ellas, así como las fuentes de información apropiadas sobre los contenidos a desarrollar.
- Utilizando el lenguaje verbal y matemático.

¿Para qué te va a servir?

Con la finalidad de que lo puedas aplicar a procesos sociales o naturales y con ello poder estimar su comportamiento, tal es el caso del ejemplo de este bloque sobre el tratamiento de la basura.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

BLOQUE TEMÁTICO TRES

MODELO DE ECUACIONES

En este Bloque temático desarrollarás los aprendizajes básicos de Aritmética y Álgebra aprendidos en los Bloques anteriores y también, aprenderás a construir y explicar modelos matemáticos basados en problemas de diversos campos, a partir del planteamiento de problemáticas situadas, adquiriendo conocimientos, habilidades y actitudes, además podrás argumentar los resultados en forma individual y grupal con una actitud propositiva, o sea, con una libertad de acción, estableciéndose un componente motivacional, que entusiasma e involucra a aprender y articulando una enseñanza acorde a las leyes del aprendizaje, las cualidades éticas de la conducta, las actitudes individuales y la situación social en que vives, logrando no sólo la adquisición de saberes específicos, sino también para la vida en una sociedad democrática.

Para lograr lo anterior vamos a partir de la siguiente **problemática situada**:

La basura sí importa

Todos los días, en el Colegio de Bachilleres se arrojan una gran cantidad de materiales que ya no se utilizan a los contenedores de basura, para que posteriormente el “camión de la basura” o “alguien” se la lleve muy lejos, seguramente a un “tiradero” destinado para ello.

Un aproximado estadístico de la basura que se desecha en el Colegio de Bachilleres diariamente, en promedio, esta compuesta por aproximadamente 3.5 Toneladas y se distribuye de la siguiente forma:

a) 33% de la basura es papel y cartón.

El papel es un recurso renovable, se puede utilizar varias veces. Si separamos el papel y el cartón, podemos llevarlo a un centro de acopio, donde se encargarán de llevarlo a las empresas de reciclaje para que pueda ser reutilizado.

b) 22% de la basura son plásticos.

Bueno, es un 22% en peso, ¡pero en volumen es un 50% ó un 60%! el plástico tarda aproximadamente **500 años** en degradarse y esto afecta a la naturaleza.

c) 20% de la basura es materia orgánica.

Está formada por los restos de residuos de alimentos, separada correctamente se puede regresar a la naturaleza.

d) 11% de la basura son desechables.

Principalmente es el unicel.

8% de la basura son metales

Estos se han ido reduciendo gracias a que el plástico los ha ido desplazando, sin embargo aún se tiran envases de metal, por ejemplo las latas de aluminio que contienen comida y refrescos; éstos también pueden ser llevados a un centro de acopio para que los reciclen.

e) 5% de la basura es vidrio.

El vidrio es muy fácil de reciclar sin perder sus propiedades, ya que se utiliza el proceso de fundición y con ello se generan nuevos objetos de este material.

f) 1% de la basura son otros materiales.

Dentro de estos materiales, podemos encontrar, productos tóxicos como baterías, pinturas, medicinas, etc. que en muchos casos también se reciclan; lo más sencillo es ponerlos por separado para que puedan ser enterrados en condiciones controladas para evitar que contaminen el subsuelo.

Sabemos que el Colegio de Bachilleres esta conformado por 20 planteles y Oficinas Generales (DG), de los cuales están considerados en tamaño como sigue:

Planteles Grandes: 01, 02, 03, 04, 05, 06 y Oficinas Generales.

Planteles Medianos: 07, 08, 09, 10, 11 y 12.

Planteles Chicos: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

En promedio los planteles grandes tiran aproximadamente el doble de basura que los Medianos y estos en promedio el doble que los chicos.

Con estos datos **¿podrás responder las siguientes preguntas?**

- 1)** ¿Qué cantidad diaria de basura generan cada uno de los planteles grandes, los medianos y los chicos? ¿Cuál es su modelo matemático?
- 2)** ¿Qué cantidad de cada desecho se tira diariamente en todo el Colegio de Bachilleres?
- 3)** Si en el plantel 02 “Cien Metros” se tiró en tres días 875Kg de basura de la siguiente forma, el lunes 140Kg más la mitad de lo que se tiró el martes y el miércoles se tiró la tercera parte del lunes, ¿Qué cantidad se tiró cada día?

- 4) Realiza una gráfica para analizar la cantidad de material desechado en el Colegio de Bachilleres durante una semana (de lunes a viernes)
- 5) Si el Colegio Plantel 03 "Iztacalco", tiró en el turno matutino y el vespertino en una semana 1050Kg de desechos, y si en el turno matutino se tiró 105Kg más que el vespertino, ¿Qué cantidad en promedio se tiró de desecho en la semana en cada turno?
- 6) Si en una semana el Plantel 01 "El Rosario" y el Plantel 20 "Del Valle" tiran 1230Kg de desechos y si el Plantel 01 tira el doble menos 100Kg de desecho que el Plantel 20 ¿Cuánto tira cada uno de ellos?
- 7) Si cada día, en el Colegio de Bachilleres se tira en promedio 2205Kg de desechos de papel, plástico y latas de aluminio y en promedio el desecho de papel menos 105Kg es igual al desecho de los otros dos y se sabe que el Kilo de papel se paga a \$0.30, el plástico a \$1.25 y el aluminio a \$15.00 y por la venta de lo que se tira de estos materiales, se recibe una cantidad de \$5509.00, ¿Cuántos kilos de desecho de cada uno de estos materiales se están tirando diariamente?

A través del análisis y la relación de las actividades que contiene este Bloque temático podrás resolver estas preguntas.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres México

1. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN PROBLEMAS DE DIVERSOS CAMPOS

En este bloque aprenderás a construir e interpretar modelos matemáticos y resolver problemas de situaciones reales que conduzcan a una ecuación de primer grado, ó a un sistema de ecuaciones de primer grado con dos o tres incógnitas, analizando el problema y observando los factores que intervienen e integrando los conocimientos adquiridos en los temas anteriores, y conjugando los aspectos algebraicos y geométricos, con el fin de utilizar métodos de solución (algebraico y gráfico), utilizando los medios, códigos y herramientas apropiados para llevarlos a la practica en la solución de problemas de diferentes campos del conocimiento.

El aprendizaje de estos nuevos conceptos y procedimientos ira de la mano con la solución de la problemática planteada en el apartado anterior, de esta forma podrás visualizar la aplicación de los nuevos conocimientos que estás adquiriendo.

1.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para iniciar recordemos que una **ecuación** es una igualdad de expresiones algebraicas compuesta por dos miembros que se verifica para un determinado valor de la variable o variables desconocidas llamadas incógnitas.

Por pertenecer a las igualdades contiene dos miembros separados por un signo igual (=).

EXPRESIÓN ALGEBRAICA DEL PRIMER MIEMBRO = EXPRESIÓN ALGEBRAICA DEL SEGUNDO MIEMBRO

Los diferentes valores que forman cada uno de los miembros se llaman términos y se encuentran separados por signos (+) más o (-) menos. Cada miembro puede tener más de un término.

Las letras que figuran en la ecuación, y de cuyo valor depende que se cumpla con la igualdad, se llaman incógnitas.

Por ejemplo:

ECUACIÓN	INCÓGNITA	PRIMER MIEMBRO	SEGUNDO MIEMBRO
$3x + 7 = 2x - 3$	x	$3x + 7$	$2x - 3$
$5x - 2x = 12 + x$	x	$5x - 2x$	$12 + x$
$\frac{x-3}{2} = \frac{x+2}{3}$	x	$\frac{x-3}{2}$	$\frac{x+2}{3}$
$x+3 = \frac{x+5}{3}$	x	$x+3$	$\frac{x+5}{3}$

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es aquella que tiene una o más variables iguales y el máximo exponente de dicha variable es uno.

1.1.1. Solución de Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita por el Método Algebraico

Resolver una ecuación consiste en hallar los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad:

Ahora bien, hallar el valor que hace verdadera a una ecuación de primer grado con una incógnita, es obtener la raíz de la ecuación o el conjunto solución de la misma. Para ello es necesario aplicar las propiedades de la igualdad y las propiedades de campo de los números reales. ¿Las recuerdas?

Propiedades de la igualdad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. PROPIEDAD REFLEXIVA: $a = a$ (PR)
2. PROPIEDAD SIMETRICA: **si $a = b$ entonces $b = a$** (PS)
3. PROPIEDAD TRANSITIVA: **si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$** (PT)
4. PROPIEDAD DE LA IGUALDAD DE LA SUMA: **si $a = b$ entonces $a + c = b + c$** (PIS)
5. PROPIEDAD DE LA IGUALDAD DE LA MULTIPLICACIÓN: **si $a = b$ entonces $(a)(c) = (b)(c)$** (PIM)

Propiedades de los números reales

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA SUMA: $a + b = b + a$	(PCS)
PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN: $(a)(b) = (b)(a)$	(PCM)
2. PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA SUMA: $a + (b + c) = (a + b) + c$	(PAS)
PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN: $(a)(b \cdot c) = (a \cdot b)(c)$	(PAM)
3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: $(a)(b + c) = (a)(b) + (a)(c)$	(PD)
4. ELEMENTO NEUTRO ADITIVO: $a + 0 = a$	(ENA)
ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO: $(a)(1) = 1$	(ENM)
5. ELEMENTO INVERSO ADITIVO: $a + (-a) = 0$	(EIA)
ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO: $\left(\frac{1}{a}\right)(a) = 1$ ó $(a^{-1})(a) = 1$	(EIM)

Observa las iniciales a la derecha de cada una de las propiedades enumeradas. Estas se anotarán a la derecha de la ecuación para indicar la propiedad que se está aplicando.

Observa los siguientes ejemplos:

1) $3x + 2x - 22 + x = 38$ (PIS)

$6x - 22 = 38$ Reducción de términos semejantes

$6x - 22 + 22 = 38 + 22$ (EIA)

$6x + 0 = 60$ (ENA)

$6x = 60$ (PIM)

$\left(\frac{1}{6}\right)6x = \left(\frac{1}{6}\right)60$ (EIM)

$x = 10$

Es conveniente comprobar que la solución es correcta y una forma es sustituyendo el valor obtenido en cada incógnita que aparece en la ecuación original obteniéndose la igualdad de los miembros.

Comprobación:

$$3x + 2x - 22 + x = 38$$

Se sustituye el valor de la solución en las incógnitas de la ecuación:

$$3(10) + 2(10) - 22 + (10) = 38$$

Se realizan los productos correspondientes:

$$30 + 20 - 22 + 10 = 38$$

Se realiza la suma algebraica en cada miembro y se cumple la identidad:

$$38 = 38$$

Por lo tanto, la solución es correcta.

Nota: Observa con cuidado cada paso realizado en las soluciones y pasa al siguiente hasta que lo hayas comprendido.

2) $3(2 - 7x) - 4 = -2(5 + 3x)$	(PD)
$6 - 21x - 4 = -10 - 6x$	Reducción de términos semejantes
$2 - 21x = -10 - 6x$	(PIS)
$2 + (-2) - 21x = -10 - 6x + (-2)$	(EIA) y reducción de términos
$0 - 21x = -12 - 6x$	(ENA)
$-21x = -12 - 6x$	(PIS)
$-21x + 6x = -12 - 6x + 6x$	(EIA) y reducción de términos
$-15x = -12 + 0$	(ENA)
$-15x = -12$	(PIM)

$$-15x\left(-\frac{1}{15}\right) = -12\left(-\frac{1}{15}\right) \quad (\text{EIM})$$

$$x = \frac{12}{15} \quad \text{Simplificando}$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Comprobación:

$$3(2 - 7x) - 4 = -2(5 + 3x)$$

Se sustituye el valor de la solución en las incógnitas de la ecuación:

$$3\left(2 - 7\left(\frac{4}{5}\right)\right) - 4 = -2\left(5 + 3\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

Se realizan los productos correspondientes:

$$3\left(2 - \frac{28}{5}\right) - 4 = -2\left(5 + \frac{12}{5}\right)$$

$$6 - \frac{84}{5} - 4 = -10 - \frac{24}{5}$$

Convertimos la ecuación a una equivalente entera, multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores, que en este caso es únicamente el 5:

$$5\left(6 - \frac{84}{5} - 4 = -10 - \frac{24}{5}\right)$$

$$30 - 84 - 20 = -50 - 24$$

Se realiza la suma algebraica en cada miembro y se cumple la identidad:

$$-74 = -74$$

Por lo tanto, la solución es correcta.

$$3) \quad \frac{3x}{4} - 35 = 100 - \frac{3x}{5}$$

Convertimos la ecuación a una equivalente entera, multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores 4 y 5 que es el 20:

$$20\left(\frac{3x}{4} - 35 = 100 - \frac{3x}{5}\right)$$

$$15x - 700 = 2000 - 12x \quad (\text{PIS})$$

$$15x - 700 + 700 = 2000 - 12x + 700 \quad (\text{EIA}) \text{ y reducción de términos}$$

$$15x + 0 = 2700 - 12x \quad (\text{ENA})$$

$$15x = 2700 - 12x \quad (\text{PIS})$$

$$15x + 12x = 2700 - 12x + 12x \quad (\text{EIA}) \text{ y reducción de términos}$$

$$27x = 2700 + 0 \quad (\text{ENA})$$

$$27x = 2700 \quad (\text{PIM})$$

$$27x\left(\frac{1}{27}\right) = 2700\left(\frac{1}{27}\right) \quad (\text{EIM})$$

$$x = 100$$

Comprobación:

$$\frac{3x}{4} - 35 = 100 - \frac{3x}{5}$$

Se sustituye el valor de la solución en las incógnitas de la ecuación:

$$\frac{3(100)}{4} - 35 = 100 - \frac{3(100)}{5}$$

Se realizan los productos correspondientes:

$$\frac{300}{4} - 35 = 100 - \frac{300}{5}$$

Se realizan las divisiones correspondientes:

$$75 - 35 = 100 - 60$$

Se realiza la suma algebraica en cada miembro y se cumple la identidad:

$$40 = 40$$

Por lo tanto, la solución es correcta.

Ahora que ya recordaste el desarrollo de una ecuación de primer grado, analicemos el problema planteado de la “**basura si importa**” y resolvamos las primeras preguntas que nos plantean en él.

Primeramente observarás que el problema esta planteado en un lenguaje cotidiano y los ejercicios realizados en un lenguaje algebraico o simbólico, por lo que, para lograr la transformación de lenguaje común a lenguaje algebraico se efectúa el siguiente procedimiento:

- Leer detenidamente el problema, a fin de reflexionar sobre la información dada y entender qué es lo que se desea obtener.
- Identificar los datos (cantidades conocidas) y la o las incógnitas (cantidades desconocidas o por conocer), así como las relaciones entre ellos, datos e incógnitas.
- Separar cada una de las partes del problema, identificando a la incógnita o a las incógnitas. Estas se representan generalmente con una de las últimas letras del alfabeto (u, v, w, x, y, z), sin olvidar que deben de ser letras minúsculas.
- De acuerdo con las condiciones del problema, se expresa la igualdad correspondiente, que es el modelo matemático requerido. Cuando este modelo matemático tiene una incógnita, se le conoce como **ecuación de primer grado con una incógnita**. Cuando el modelo matemático forma más de una ecuación con dos o tres incógnitas, se le llama un **sistema de ecuaciones de primer grado con dos o tres incógnitas** según sea el caso. Considerando que el numero de incógnitas me indica el número de ecuaciones que se requieren para su solución.

Retomemos ahora la primera pregunta de la problemática.

1. ¿Qué cantidad diaria de basura generan cada uno de los planteles grandes, los medianos y los chicos? ¿Cuál es su modelo matemático?

Los datos que tenemos son:

- 3.5 Toneladas de basura que desecha diariamente el Colegio de Bachilleres.
- 7 Planteles grandes

- 6 Planteles medianos
- 8 Planteles chicos

Lo que queremos conocer es:

x = Cantidad de basura que tira diariamente un plantel chico.

$2x$ = Cantidad de basura que tira diariamente un plantel mediano.

$2(2x)$ = Cantidad de basura que tira diariamente un plantel grande.

El **modelo matemático** que muestra esta situación es:

$$7[2(2x)] + 6(2x) + 8(x) = 3.5 \text{Toneladas}$$

Desarrollando las multiplicaciones correspondientes:

$$28x + 12x + 8x = 3.5 \text{Toneladas}$$

Sabemos que una tonelada es igual a 1000kg, por lo tanto:

$$28x + 12x + 8x = 3,500 \text{kg}$$

Reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$48x = 3500 \quad (\text{PIM})$$

$$48x \left(\frac{1}{48} \right) = 3500 \left(\frac{1}{48} \right) \quad (\text{EIM})$$

$$x = \frac{3500}{48}$$

Por lo tanto, el valor de nuestra incógnita es:

$$x = 72.91 \text{Kg} , \text{aproximadamente}$$

Respondiendo a la pregunta: ¿Qué cantidad diaria de basura generan cada uno de los planteles grandes, los medianos y los chicos?

$x = 72.91 \text{Kg}$, Cantidad de basura que genera diariamente un plantel chico.

$2x = 145.82 \text{Kg}$, Cantidad de basura que genera diariamente un plantel mediano.

$2(2x) = 291.64 \text{Kg}$, Cantidad de basura que genera diariamente un plantel grande.

2) ¿Qué cantidad de cada desecho se tira diariamente en el Colegio de Bachilleres?

Un aproximado estadístico de las 3.5 Toneladas de la basura que se desecha en el Colegio de Bachilleres diariamente, se distribuye de la siguiente forma:

- a) 33% de la basura es papel y cartón.
- b) 22% de la basura son plásticos.
- c) 20% de la basura es materia orgánica.
- d) 11% de la basura son desechables.
- e) 8% de la basura son metales.
- f) 5% de la basura es vidrio.
- g) 1% de la basura son otros materiales.

Para saber la cantidad de cada desecho, que se tira diariamente en el Colegio de Bachilleres, podemos modelar una proporción o regla de tres para responder a esta pregunta.

Solución:

- a) 33% de la basura es papel y cartón.

La cantidad de papel y cartón se dará por:

$$\begin{array}{rcl} 3500\text{Kg} & \text{-----} & 100\% \\ x & \text{-----} & 33\% \end{array} \quad \text{ó}$$

$$\frac{3500 \text{Kg}}{100\%} = \frac{x}{33\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{Kg})(33\%) = (x)(100\%) \quad \text{(EIM)}$$

$$(3500 \text{Kg})(33\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(33\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el símbolo correspondiente, tendremos que:

$$x = 1,155 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de papel y cartón.}$$

b) 22% de la basura son plásticos.

La cantidad de plástico se dará por:

3500Kg _____	100%	
x _____	22%	ó

$$\frac{3500 \text{ Kg}}{100\%} = \frac{x}{22\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{ Kg})(22\%) = (x)(100\%) \quad \text{(EIM)}$$

$$(3500 \text{ Kg})(22\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(22\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el símbolo correspondiente, tendremos que:

$$x = 770 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de plástico.}$$

c) 20% de la basura es materia orgánica.

La cantidad de materia orgánica se dará por:

3500Kg _____	100%
---------------------	-------------

$$x \text{ ————— } 20\% \quad \text{ó}$$

$$\frac{3500 \text{ Kg}}{100\%} = \frac{x}{20\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{ Kg})(20\%) = (x)(100\%) \quad \text{(EIM)}$$

$$(3500 \text{ Kg})(20\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(20\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el símbolo correspondiente, tendremos que:

$$x = 700 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de materia orgánica.}$$

d) 11% de la basura son desechables.

La cantidad de desechables se dará por:

$$\begin{array}{r} 3500\text{Kg} \text{ ————— } 100\% \\ x \text{ ————— } 11\% \quad \text{ó} \end{array}$$

$$\frac{3500 \text{ Kg}}{100\%} = \frac{x}{11\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{ Kg})(11\%) = (x)(100\%) \quad \text{(EIM)}$$

$$(3500 \text{ Kg})(11\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(11\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el símbolo correspondiente, tendremos que:

$$x = 385 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de desechables.}$$

e) 8% de la basura son metales

La cantidad de metales se dará por:

3500Kg	—————	100%	
x	—————	8%	ó

$$\frac{3500 \text{ Kg}}{100\%} = \frac{x}{8\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{ Kg})(8\%) = (x)(100\%) \quad \text{(EIM)}$$

$$(3500 \text{ Kg})(8\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(8\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el símbolo correspondiente, tendremos que:

$$x = 280 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de metales.}$$

f) 5% de la basura es vidrio.

La cantidad de vidrio se dará por:

3500Kg	—————	100%	
x	—————	5%	ó

$$\frac{3500 \text{ Kg}}{100\%} = \frac{x}{5\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{ Kg})(5\%) = (x)(100\%) \quad (\text{EIM})$$

$$(3500 \text{ Kg})(5\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(5\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el símbolo correspondiente, tendremos que:

$$x = 175 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de vidrio.}$$

g) 1% de la basura son otros materiales.

La cantidad de otros materiales se dará por:

$$\begin{array}{ccc} 3500\text{Kg} & \text{-----} & 100\% \\ x & \text{-----} & 1\% \quad \text{ó} \end{array}$$

$$\frac{3500 \text{ Kg}}{100\%} = \frac{x}{1\%}$$

Por el teorema de proporciones: (la multiplicación de los extremos es igual a la multiplicación de los medios)

$$(3500 \text{ Kg})(1\%) = (x)(100\%) \quad (\text{EIM})$$

$$(3500 \text{ Kg})(1\%) \left(\frac{1}{100\%} \right) = (x)(100\%) \left(\frac{1}{100\%} \right)$$

$$\frac{(3500 \text{ Kg})(1\%)}{100\%} = x$$

Resolviendo las operaciones de multiplicación y división y eliminando el signo correspondiente, tendremos que:

$$x = 35 \text{ Kg} , \text{ de desecho diario de otros materiales.}$$

3) Si en el plantel 02 "Cien Metros" se tiró en tres días 875Kg de basura de la siguiente forma, el lunes 140Kg más la mitad de lo que se tiró el martes y el miércoles la tercera parte del lunes, ¿Qué cantidad se tiró cada día?

Datos:

875Kg de basura que se tiró en tres días.

Basura que se tiró el lunes = 140Kg + la mitad de x (basura tirada el martes).

x = basura tirada el martes.

Basura que se tiró el miércoles = a la tercera parte de (140Kg + la mitad de x).

El **modelo matemático** que muestra esta situación será:

$$140 + \frac{1}{2}x + x + \frac{1}{3}\left(140 + \frac{1}{2}x\right) = 875 \text{ Kg}$$

Desarrollando primeramente la multiplicación, tendremos:

$$140 + \frac{1}{2}x + x + \frac{140}{3} + \frac{1}{6}x = 875$$

Convertimos la ecuación a una equivalente entera, multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores, que en este caso es 6:

$$6\left[140 + \frac{1}{2}x + x + \frac{140}{3} + \frac{1}{6}x = 875\right]$$

Resolviendo la multiplicación queda:

$$840 + 3x + 6x + 280 + x = 5250$$

Reducción de términos

$$10x + 1120 = 5250$$

(PIS)

$$10x + 1120 + (-1120) = 5250 + (-1120)$$

(EIA) y reducción de términos

$$10x + 0 = 4130$$

(ENA)

$$10x = 4130$$

(PIM)

$$10x\left(\frac{1}{10}\right) = 4130\left(\frac{1}{10}\right)$$

(EIM)

Por lo tanto, el valor de nuestra incógnita es:

$$x = 413Kg$$

Respondiendo a la pregunta: **¿Qué cantidad se tiró cada día?**

$$140 + \frac{1}{2}x = 140 + \frac{1}{2}(413) = 140 + 206.5 = 346.5Kg, \text{ basura que se tiró el lunes}$$

$x = 413Kg$, basura tirada el martes.

$$\frac{1}{3}\left(140 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{3}(346.5) = 115.5Kg, \text{ basura que se tiró el miércoles.}$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 18

Para ejercitar los procesos aprendidos hasta el momento, realiza lo que se solicita a continuación.

Observa las siguientes estadísticas de la Ciudad de México.

- México genera 92,300 (noventa y dos mil, trescientos) toneladas diarias de basura.
- El D. F. solo recicla el 6% de las 12 mil toneladas diarias.
- El 80% de desperdicios van a rellenos sanitarios a cielo abierto.
- Más de 30 mil toneladas diarias van a barrancos, ríos y terrenos baldíos.
- El 65% de la población Mexicana no separa la basura.
- En 1950 cada persona producía 0.37Kg de residuos al día, hoy por individuo se genera 1.2Kg.

Según esta información estadística, la basura, se distribuye principalmente de la siguiente forma:

- a) 46% de la basura es materia orgánica.
- b) 22% de la basura es papel y cartón.
- c) 12% de la basura son plásticos.
- d) 8% de la basura es vidrio.
- e) 4% de la basura son metales.
- f) 8% de la basura son otros materiales.

¡Ahora es tu turno! con estas estadísticas desarrolla las siguientes preguntas, siguiendo el proceso que se mostró en el desarrollo de la problemática “La basura si importa”.

- 1) La producción de basura depende de la región de México que se esté considerando. Si se divide al país en las regiones Centro, D. F., Norte, Sur y Frontera Norte y si el Centro tira 5 veces lo que el sur, el Distrito Federal tira lo que tira el sur mas 2,769 toneladas, el Norte tira el doble de lo que el sur menos 1,846 toneladas y la Frontera Norte tira lo que el sur menos 923 toneladas ¿Qué cantidad de basura genera cada región del país?
- 2) ¿Qué cantidad, de cada uno de los tipos de desecho de basura en promedio se tira diariamente en la Ciudad de México?
- 3) Si en el Distrito Federal se tiran 9,600 toneladas diarias formadas de “materia orgánica”, “papel y cartón” y “plástico”, si la mitad de “materia orgánica” menos 120 toneladas es de “papel y cartón” y la quinta parte de “materia orgánica” más 336 toneladas es de plástico ¿Qué cantidad de material de desecho se tira diariamente de cada uno de ellos?

- 4) De las 4,560 toneladas de desechos de “papel y cartón”, “plástico” y “latas de aluminio” que se tiran diariamente en el Distrito Federal se podría recuperar aproximadamente \$9, 792,000.00 si hubiera un adecuado reciclaje pero, en el D. F. solo en promedio se recicla el 6% de las 4,560 toneladas diarias que se tiran ¿Cuánto representa en dinero lo que se esta recuperando realmente?

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para que puedas comparar tus resultados te mostramos a continuación el proceso y las soluciones a las que debiste llegar:

1):

x : Cantidad de basura en toneladas que tira diariamente la región Sur

$5x$: Cantidad de basura en toneladas que tira diariamente la región Centro

$x + 2769$: Cantidad de basura en toneladas que tira diariamente el Distrito Federal

$2x - 1846$: Cantidad de basura en toneladas que tira diariamente la región Norte

$x - 923$: Cantidad de basura en toneladas que tira diariamente la región de la Frontera Norte

Modelo matemático:

$$x + 5x + x + 2769 + 2x - 1846 + x - 923 = 92300$$

Resolviendo queda:

$$x = 9230$$

Por lo tanto:

9 230 toneladas: Cantidad de basura que se tira diariamente en la región Sur

46 150 toneladas: Cantidad de basura que se tira diariamente en la región Centro

11 999 toneladas: Cantidad de basura que se tira diariamente en el Distrito Federal

16 614 toneladas: Cantidad de basura que se tira diariamente en la región Norte

8 307 toneladas: Cantidad de basura que se tira diariamente en la región de la Frontera Norte

92 300 toneladas: Cantidad de basura que se tira diariamente en la Ciudad de México

2):

a): Modelo matemático

$$\frac{100\%}{92300} = \frac{46\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = 42458$, toneladas de desecho de material orgánico que se tira diariamente

b): Modelo matemático

$$\frac{100\%}{92300} = \frac{22\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = 20306$, toneladas de desecho de papel y cartón que se tira diariamente

c): Modelo matemático

$$\frac{100\%}{92300} = \frac{12\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = 11076$, toneladas de desecho de plástico que se tira diariamente

d): Modelo matemático

$$\frac{100\%}{92300} = \frac{8\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = 7384$, toneladas de desecho de vidrio que se tira diariamente

e): Modelo matemático

$$\frac{100\%}{92300} = \frac{4\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = 3692$, toneladas de desecho de metales que se tira diariamente

f): Modelo matemático

$$\frac{100\%}{92300} = \frac{8\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = 7384$, toneladas de desecho de otros materiales que se tira diariamente

3):

x : Cantidad en toneladas de material orgánico que se tira diariamente

$\frac{x}{2} - 120$: Cantidad en toneladas de papel y cartón que se tira diariamente

$\frac{x}{5} + 336$: Cantidad en toneladas de plástico que se tira diariamente

Modelo matemático:

$$x + \frac{x}{2} - 120 + \frac{x}{5} + 336 = 9600$$

Resolviendo se tendrá:

$$x = 5520$$

Por lo tanto:

5 520 toneladas: Cantidad de material orgánico que se tira diariamente

2 640 toneladas: Cantidad de papel y cartón que se tira diariamente

1 440 toneladas: Cantidad de plástico que se tira diariamente

4):

Modelo matemático

$$\frac{100\%}{9792000} = \frac{6\%}{x}$$

Por lo tanto:

$x = \$587520$, es aproximadamente lo que se esta recuperando realmente

Ahora que ya conoces lo que normalmente contiene la basura, reflexiona sobre lo siguiente:

- ¿Qué podemos hacer como parte de la comunidad para resolver el problema ecológico que generamos?
- Y tú... ¿Cómo piensas ayudar? ¿Qué puedes hacer en tu localidad?
- ¿Realmente estás conciente de la riqueza que va en esa bolsa de basura y todo lo que podemos hacer con ella, sabiendo cómo clasificarla o reciclarla?
- ¿Cómo podrías separar la basura para poder reciclarla?
- Si reciclas la basura, ¿podrías obtener algún beneficio? ¿Cuál?

Se te recomienda consultar las siguientes fuentes de información:

<http://www2.ine.gob.mx/publicaciones/libros/508/aspectos.pdf>

<http://www.andinia.com/a20272.shtml>

1.1.2. Interpretación Gráfica de una Ecuación de Primer Grado utilizando dos incógnitas

Hasta aquí has obtenido la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita, utilizando métodos algebraicos. Ahora veremos su representación gráfica.

Conviene recordar en qué consiste el plano cartesiano y después obtener la gráfica correspondiente.

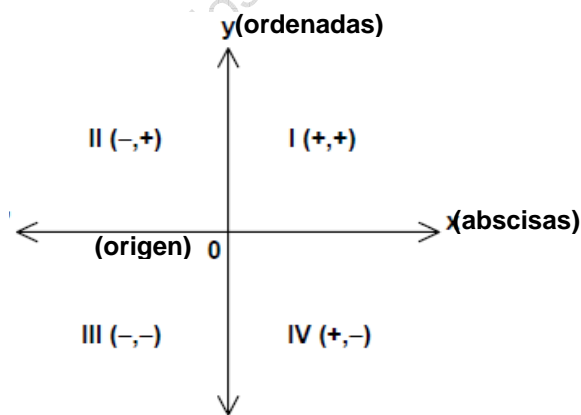
Sistema de ejes cartesianos

El plano cartesiano es un sistema formado por dos rectas numéricas llamadas ejes coordenados perpendiculares entre sí. La recta horizontal representa el eje “**x**” o eje de las abscisas; la recta vertical representa el eje “**y**” o eje de las ordenadas y el punto de intersección entre ambos ejes es el origen (0) del plano.

Cada eje coordenado tiene dirección positiva y negativa; para el eje “**x**” la dirección positiva es hacia la derecha del origen y la negativa hacia la izquierda de dicho origen; para el eje “**y**” la dirección positiva es hacia arriba del origen y la negativa hacia abajo de dicho origen.

La intersección de los ejes forman cuatro cuadrantes en el plano y en él se representan puntos **P(x, y)** de pares ordenados.

Gráfica 1. Ejes cartesianos



EJEMPLO

Localizar los siguientes puntos en el plano cartesiano.

A (2, 3)

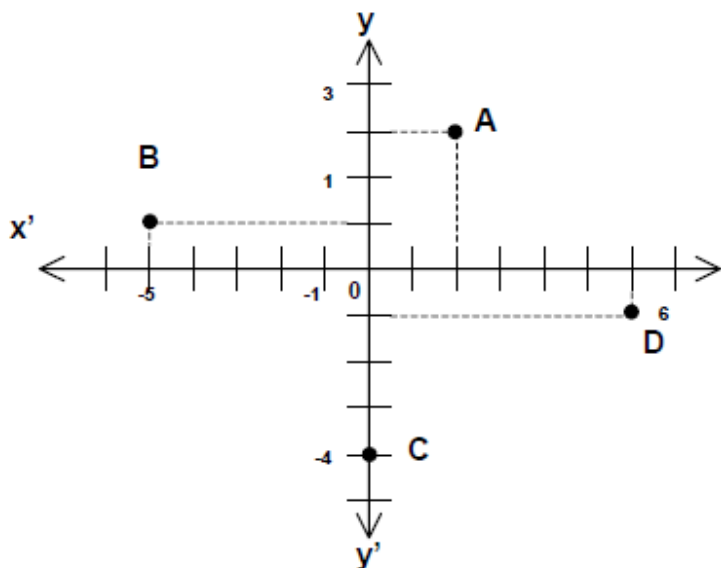
B (-5, 1)

C (0, -4)

D (6, -1)

Como un punto en el plano es la representación $P(x, y)$, entonces se localiza la abscisa “ x ” y la ordenada “ y ”, se trazan líneas paralelas a cada eje y la intersección de éstas líneas es el punto que se desea ubicar (como lo muestra la siguiente figura).

Gráfica 2. Puntos en el plano cartesiano



Construcción gráfica de la ecuación lineal

La construcción y lectura de gráficos son necesidades imprescindibles en el mundo actual. La representación gráfica de una ecuación lineal se construye a partir de una función lineal, y dicha gráfica es una línea recta representada en el plano cartesiano.

Desde un punto de vista informal, una función es una regla que permite asignar a cada uno de los elementos “ x ” de un conjunto “ A ” un único elemento “ y ” de otro conjunto “ B ”. A diario tenemos ejemplos de estas asignaciones: el medico dosifica un antibiótico en función del peso del bebe, nos cobran el pasaje en función de la distancia recorrida, la distancia recorrida es función de la velocidad alcanzada, etc.

Función: sean “ A ” y “ B ” dos subconjuntos de los números reales (R). Cuando existe una relación entre las variables “ x ” e “ y ”, donde $x \in A$ e $y \in B$, en la que a cada valor de la variable independiente “ x ” le corresponde un único valor de la variable dependiente “ y ”, diremos que dicha relación es una función.

La representación matemática de una función lineal es:

$$f(x) = ax \quad \text{o} \quad f(x) = ax + b$$

Donde:

$$f(x) = y$$

EJEMPLO

Construir la representación gráfica de la ecuación:

$$-3x - 1 + y = -2x - 3$$

Se realizan los procedimientos necesarios para dejar a "y" sola en uno de los extremos de la ecuación dada y así formar a la función lineal.

$$\begin{array}{ll} -3x - 1 + y = -2x - 3 & \text{(PIS)} \\ -3x - 1 + 1 + y = -2x - 3 + 1 & \text{(EIA) y reducción de términos} \\ -3x + 0 + y = -2x - 2 & \text{(ENA)} \\ -3x + y = -2x - 2 & \text{(PIS)} \\ -3x + 3x + y = -2x - 2 + 3x & \text{(EIA) y reducción de términos} \\ 0 + y = x - 2 & \text{(ENA)} \\ y = x - 2 & \end{array}$$

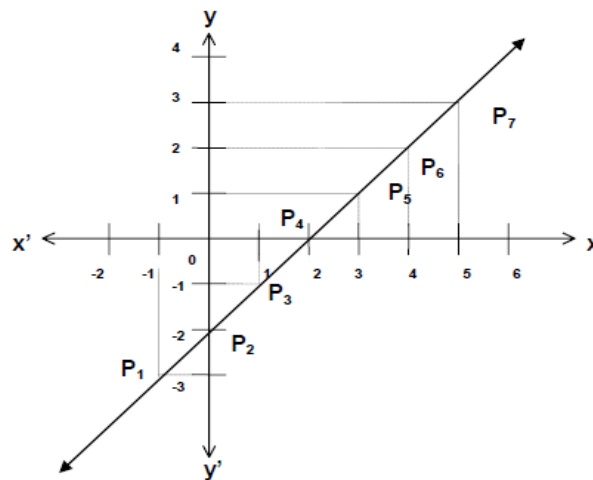
Al obtener la función lineal, se construye una tabulación asignándole valores arbitrarios a la variable independiente (x) que se sustituyen en la función lineal para obtener los valores de la variable dependiente (y), y así formar puntos de pares ordenados que al unirlos en el plano, dan lugar a una línea recta.

Tabla 1. Tabulación de valores de x

x	y = x - 2	y	P(x, y)
-1	y = -1 - 2	-3	P ₁ (-1, -3)
0	y = 0 - 2	-2	P ₂ (0, -2)
1	y = 1 - 2	-1	P ₃ (1, -1)
2	y = 2 - 2	0	P ₄ (2, 0)
3	y = 3 - 2	1	P ₅ (3, 1)
4	y = 4 - 2	2	P ₆ (4, 2)
5	y = 5 - 2	3	P ₇ (5, 3)

Se grafican los puntos P(x, y) en el plano cartesiano uniendo cada uno de ellos.

Gráfica 3, P (x, y)



Observa que la ecuación de primer grado con dos incógnitas se puede graficar en el plano cartesiano y su figura es una línea recta; la solución en esa gráfica se obtiene en la abscisa “x” del punto de intersección de la recta con el eje horizontal. Así, que a la “x” se le da el nombre de variable independiente por los valores que se le pueden asignar dentro de los números reales y que la variable dependiente corresponde a “y”, puesto que su valor se determina por los valores de “x”

En una situación real la tabla de valores o la gráfica de la línea recta que forma la ecuación de primer grado, nos da datos en sus diferentes momentos que suceden.

Un problema real son los problemas de la acumulación y propagación de desperdicios, así como la resultante contaminación, han pasado a formar parte del selecto grupo de los más graves e inexcusables peligros del mundo. Su apremiante y efectiva solución es compleja, más hay que tomar y formar conciencia sobre el hecho de que si no manejamos el asunto con rapidez para disminuir su impacto en el equilibrio ecológico, la vida en el planeta, tal como la conoces, se verá radicalmente afectada y dejarán de existir muchas de las especies animales y vegetales que hoy conoces.

Regresemos a nuestra problemática de “**la basura si importa**”.

3) Realiza una gráfica para analizar la cantidad de material desechado en el Colegio de Bachilleres durante una semana (de lunes a viernes)

Para que tengas idea de la cantidad aproximada de los diferentes materiales de desecho que produce el Colegio de Bachilleres en una semana de lunes a viernes, elaboremos una tabla con los datos obtenidos y luego realicemos su representación gráfica.

Primeramente recuperemos los datos obtenidos de la cantidad diaria de basura que se tira de desecho de cada material.

Datos:

1,155 Kg , de desecho diario de papel y cartón.

770 Kg , de desecho diario de plástico.

700 Kg , de desecho diario de materia orgánica.

385 Kg , de desecho diario de desechables.

280 Kg , de desecho diario de metales.

175 Kg , de desecho diario de vidrio.

35 Kg , de desecho diario de otros materiales.

El **modelo matemático** que representa la generación de basura, lo podemos interpretar como sigue:

$$\text{Cantidad de basura (Kg.)} = \text{Cantidad de basura generada de cada material al día por el número de días}$$

En un lenguaje algebraico tendremos:

y = cantidad de basura (Kg.)

c = cantidad de basura de cada material generada al día (Kg.)

x = tiempo (días)

$$y = cx$$

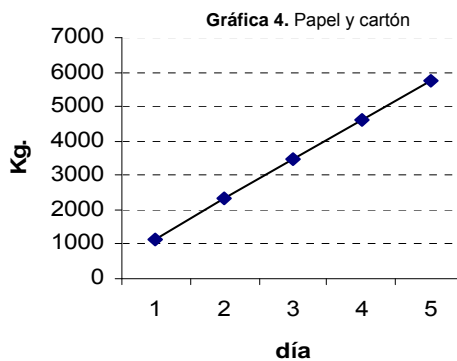
Con este modelo desarrollamos la siguiente tabla:

Tabla 2. Modelo matemático por tipo de basura

Tipo de basura	Modelo matemático	Que se genera en:				
		Un día (lunes) (Kg.)	Dos días (martes) (Kg.)	Tres días (miércoles) (Kg.)	Cuatro días (jueves) (Kg.)	Cinco días (viernes) (Kg.)
Papel y cartón	$y = 1155x$	1155	2310	3465	4620	5775
Plásticos	$y = 770x$	770	1540	2310	3080	3850
Material orgánico	$y = 700x$	700	1400	2100	2800	3500
Desechables	$y = 385x$	385	770	1155	1540	1925
Metales	$y = 280x$	280	560	840	1120	1400
Vidrio	$y = 175x$	175	350	525	700	875
Otros materiales	$y = 35x$	35	70	105	140	175

Estos datos pueden quedar representados en las siguientes Gráficas:

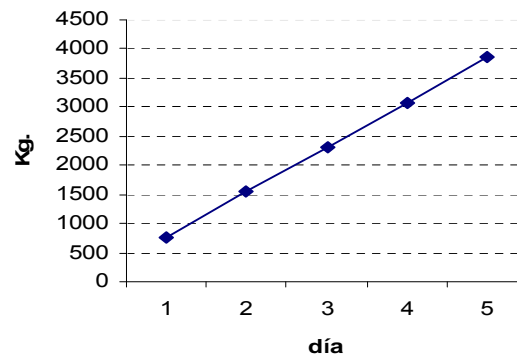
Modelo Matemático
 $y = 1155x$



Modelo Matemático

$$y = 770x$$

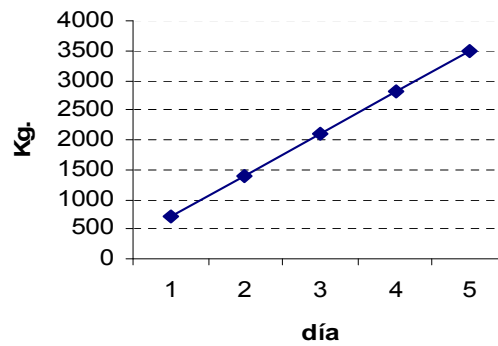
Gráfica 5. Plásticos



Modelo Matemático

$$y = 700x$$

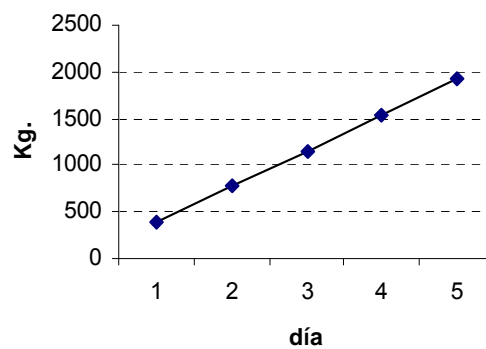
Gráfica 6. Material orgánico



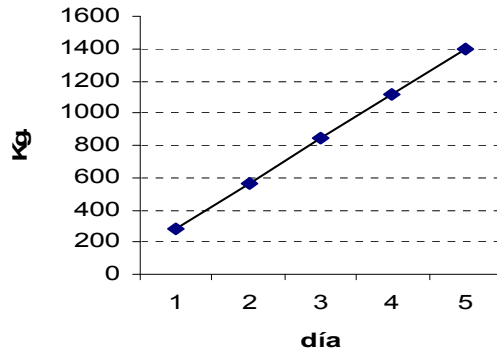
Modelo Matemático

$$y = 385x$$

Gráfica 7. Desechables



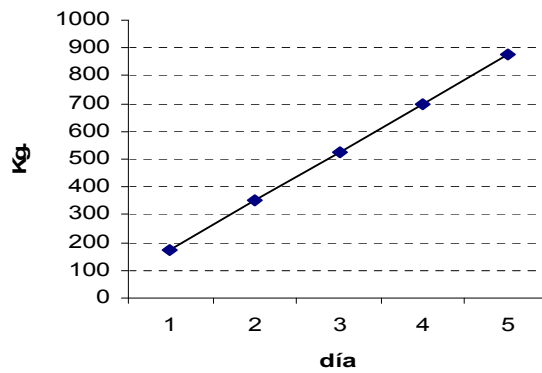
Gráfica 8. Metales



Modelo Matemático

$$y = 280x$$

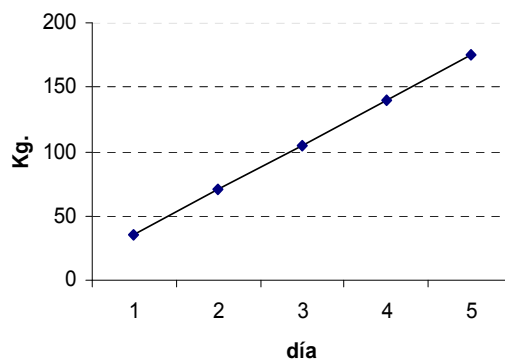
Gráfica 9. Vidrio



Modelo Matemático

$$y = 175x$$

Gráfica 10. Otros materiales



Modelo Matemático

$$y = 35x$$

Observa con cuidado las gráficas y su relación con sus variables, si tienes problemas al interpretarlas, te recomendamos revises de nuevo la Interpretación Gráfica de una función lineal.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 19

En la actividad de aprendizaje anterior se obtuvieron los siguientes datos de basura que se tira diariamente en la Ciudad de México:

Desechos	Material orgánico	Papel y Cartón	Plástico	Vidrio	Metales	Otros materiales
Toneladas	42,458	20,306	11,076	7,384	3,692	7,384

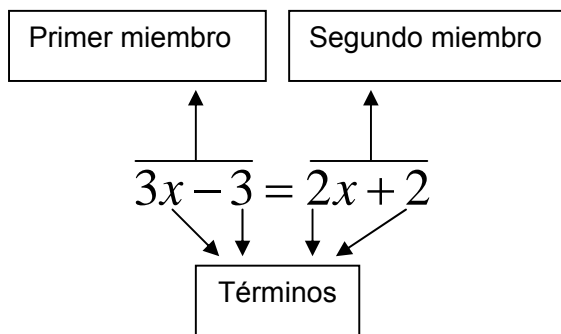
Con estos datos obtén el modelo matemático y realiza una tabla para obtener los datos que te permitan hacer la representación gráfica de la cantidad que se tira de cada material desechado en la Ciudad de México durante una semana (siete días). Apóyate en el proceso que se mostró anteriormente.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres MEXICO

RESUMEN

En este apartado revisamos las ecuaciones de primer grado, donde se analizó el proceso de solución, por medio del método algebraico y su interpretación gráfica, así mismo se aplicó la transformación de lenguaje común a lenguaje algebraico en el desarrollo de problemáticas situadas para establecer modelos matemáticos que se le conoce como ecuación.

Como se vio en el bloque 2, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se denominan miembros de la ecuación, los cuales aparecen a ambos lados del signo igual. Los términos son los sumandos que forman los miembros.



Las incógnitas son las letras que aparecen en la ecuación. La solución son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea verdadera.

En general para resolver una ecuación debemos seguir los siguientes pasos:

- Quitar paréntesis
- Quitar denominadores
- Agrupar los términos en "x" en un miembro y los términos independientes en el otro
- Reducir los términos semejantes
- Despejar la incógnita

Para resolver un problema se puede efectuar el siguiente procedimiento:

Planteamiento del problema	Modelo matemático (ecuación de primer grado o función lineal)	Solución método algebraico	Interpretación gráfica
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Leer detenidamente el problema ➤ Identificar los datos y la o las incógnitas ➤ Separar cada una de las partes del problema, nombrando a la o las incógnitas 	$5x + 7 = 3x + 13$ $f(x) = ax$ $f(x) = ax + b$	$5x + 7 = 3x + 1$ $5x - 3x = 13 - 7$ $2x = 6$ $x = \frac{6}{2}$ $x = 3$	<p>Se puede dar en los problemas que nos lleven a un modelo matemático que conduzca a una función lineal, dando valores para "x" y así obtener los puntos que se grafican en el plano cartesiano.</p>

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

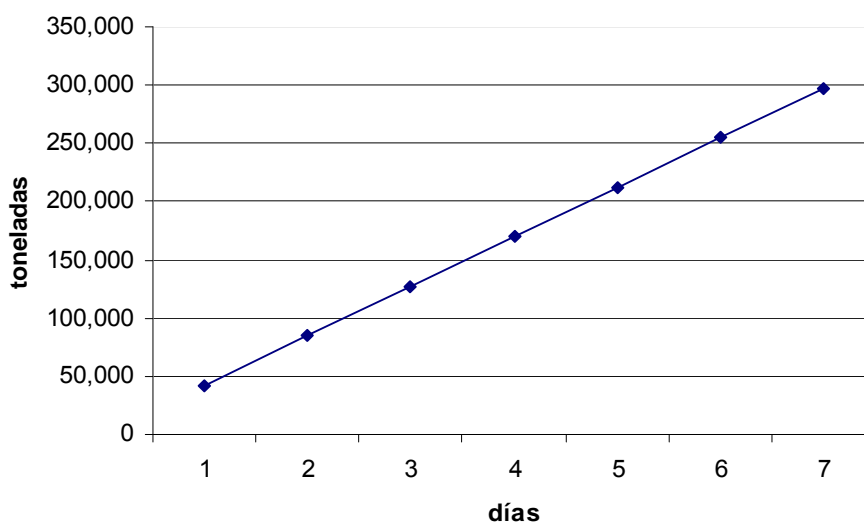
Para que puedas comparar tus resultados se muestran las tablas, los modelos matemáticos y los datos que debiste de obtener, así como su respectiva representación gráfica.

Material orgánico:

x	Función $y = c(x)$	y	(x, y)
1	$y = (42,458) (1)$	42,458	(1, 42458)
2	$y = (42,458) (2)$	84,916	(2, 84916)
3	$y = (42,458) (3)$	127,374	(3, 127374)
4	$y = (42,458) (4)$	169,832	(4, 169832)
5	$y = (42,458) (5)$	212,290	(5, 212290)
6	$y = (42,458) (6)$	254,748	(6, 254748)
7	$y = (42,458) (7)$	297,206	(7, 297206)

c = toneladas de material orgánico que se tira en un día

Desecho diario de material organico

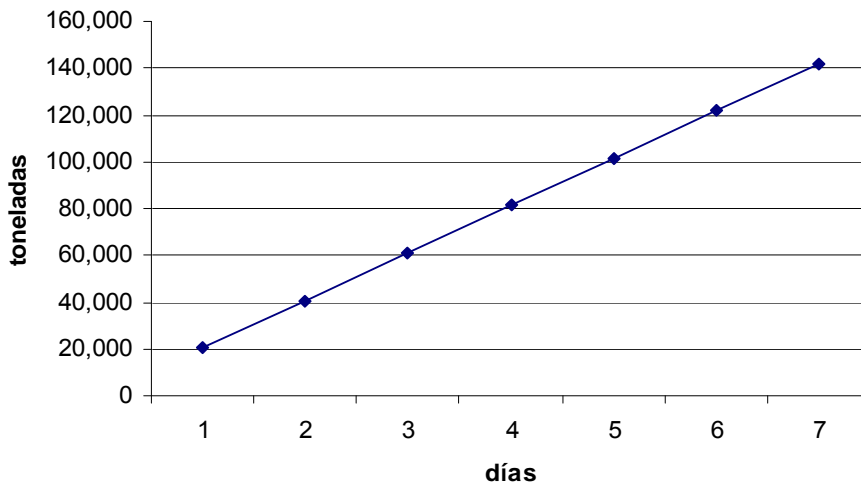


Papel y cartón

x	Función $y = c(x)$	y	(x, y)
1	$y = (20,306) (1)$	20,306	(1, 20306)
2	$y = (20,306) (2)$	40,612	(2, 40612)
3	$y = (20,306) (3)$	60,918	(3, 60918)
4	$y = (20,306) (4)$	81,224	(4, 81224)
5	$y = (20,306) (5)$	101,530	(5, 101530)
6	$y = (20,306) (6)$	121,836	(6, 121836)
7	$y = (20,306) (7)$	142,142	(7, 142142)

c = toneladas de papel y cartón que se tira en un día

Desecho diario de papel y cartón

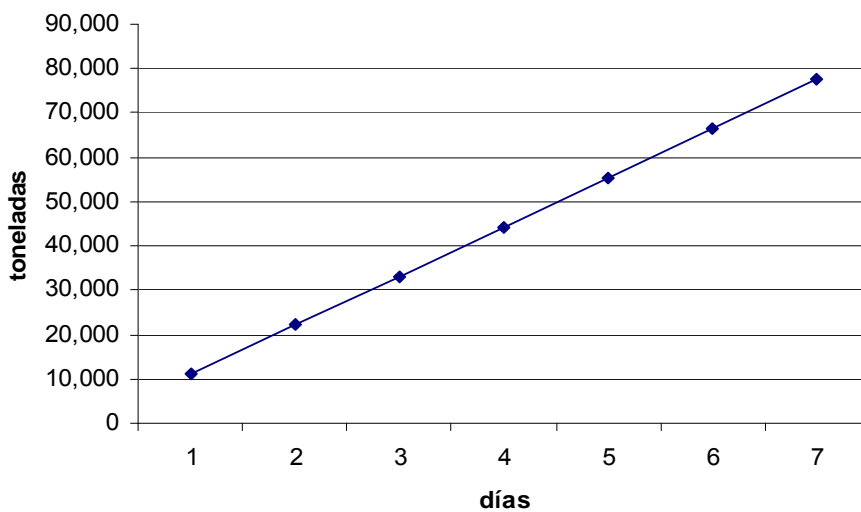


Plásticos

x	Función $y = c(x)$	y	(x, y)
1	$y = (11,076)(1)$	11,076	(1, 11076)
2	$y = (11,076)(2)$	22,152	(2, 22152)
3	$y = (11,076)(3)$	33,228	(3, 33228)
4	$y = (11,076)(4)$	44,304	(4, 44304)
5	$y = (11,076)(5)$	55,380	(5, 55380)
6	$y = (11,076)(6)$	66,456	(6, 66456)
7	$y = (11,076)(7)$	77,532	(7, 77532)

c = toneladas de plástico que se tira en un día

Desecho diario de plasticos

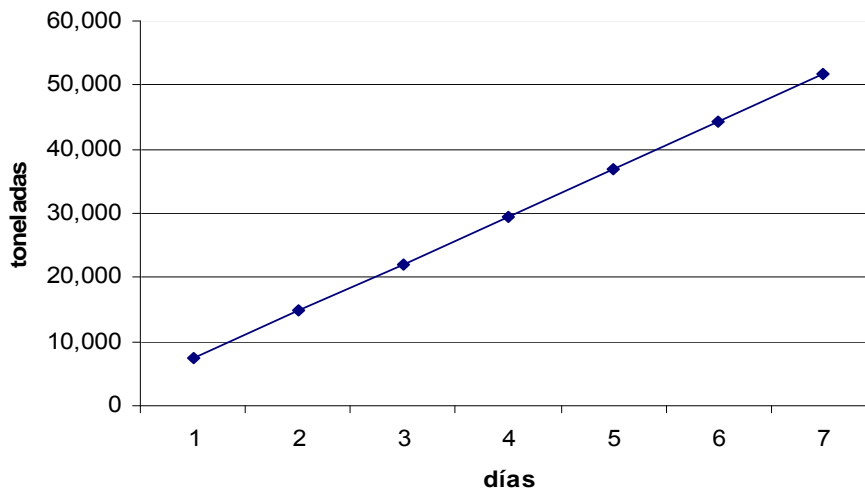


Vidrios

x	Función $y = c(x)$	y	(x, y)
1	$y = (7,384) (1)$	7,384	(1, 7384)
2	$y = (7,384) (2)$	14,768	(2, 14768)
3	$y = (7,384) (3)$	22,152	(3, 22152)
4	$y = (7,384) (4)$	29,536	(4, 29536)
5	$y = (7,384) (5)$	36,920	(5, 36920)
6	$y = (7,384) (6)$	44,304	(6, 44304)
7	$y = (7,384) (7)$	51,688	(7, 51688)

c = toneladas de vidrio que se tira en un día

Desecho diario de vidrio

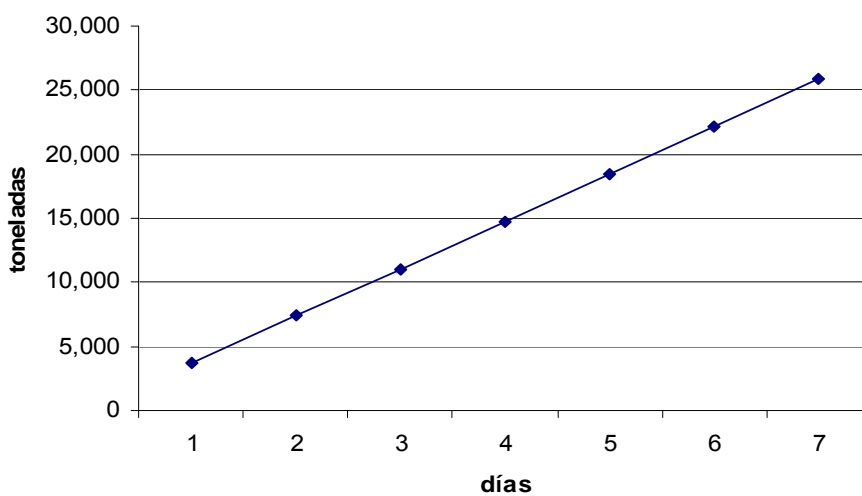


Metales

x	Función $y = c(x)$	y	(x, y)
1	$y = (3,692) (1)$	3,692	(1, 3692)
2	$y = (3,692) (2)$	7,384	(2, 7384)
3	$y = (3,692) (3)$	11,076	(3, 11076)
4	$y = (3,692) (4)$	14,768	(4, 14768)
5	$y = (3,692) (5)$	18,460	(5, 18460)
6	$y = (3,692) (6)$	22,152	(6, 22152)
7	$y = (3,692) (7)$	25,844	(7, 25844)

c = toneladas de metal que se tira en un día

Desecho diario de metal

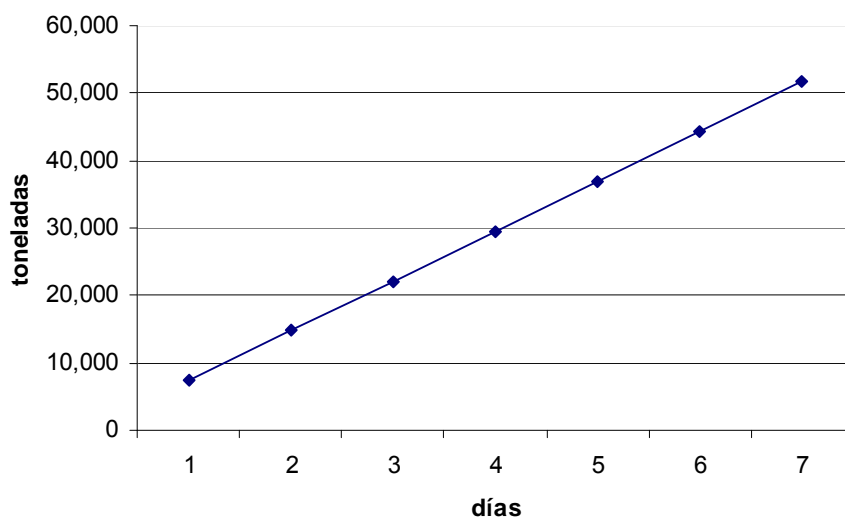


Otros materiales

x	Función $y = c(x)$	y	(x, y)
1	$y = (7,384)(1)$	7,384	(1, 7384)
2	$y = (7,384)(2)$	14,768	(2, 14768)
3	$y = (7,384)(3)$	22,152	(3, 22152)
4	$y = (7,384)(4)$	29,536	(4, 29536)
5	$y = (7,384)(5)$	36,920	(5, 36920)
6	$y = (7,384)(6)$	44,304	(6, 44304)
7	$y = (7,384)(7)$	51,688	(7, 51688)

c = toneladas de otros materiales que se tira en un día

Desecho diario de otros materiales



1.2. Métodos de solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

En ocasiones existen situaciones en las que tenemos que encontrar más de un valor, por lo que es necesario encontrar dos o tres datos que están relacionados, y al traducirlos al lenguaje algebraico se forman dos o tres ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas. En estos casos decimos que se forma un sistema de ecuaciones lineales. Dichos sistemas se clasifican por el número y el tipo de ecuaciones que los forman.

Al sistema formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se le conoce como un sistema de dos por dos. Si el sistema está formado por tres ecuaciones y tres incógnitas, se le llama sistema de tres por tres.

La parte importante de un sistema de ecuaciones es aprender a construirlos y saber resolverlos. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas se puede solucionar por método gráfico y los métodos analíticos (el de suma o resta; el de sustitución; el de igualación, y por determinantes), resolver un sistema de ecuaciones es realmente sencillo y nos permite interpretar objetivamente un problema al encontrar los valores requeridos.

Resolver un sistema de ecuaciones es buscar la solución que es **común** a todas esas ecuaciones, es decir, la solución debe verificarse simultáneamente en todas las ecuaciones que componen el sistema.

1.2.1. Método Gráfico

La gráfica de cada ecuación de un sistema 2×2 de ecuaciones lineales, es una recta. Por lo que el método gráfico: consiste en representar gráficamente las ecuaciones del sistema para determinar (si la hay) la intersección de las rectas que las representan.

Ejemplo: Resolver gráficamente el sistema

$$x - y = -1$$

$$2x - y = 1$$

Solución: Se tabulan las ecuaciones despejando a “y” en cada una de ellas:

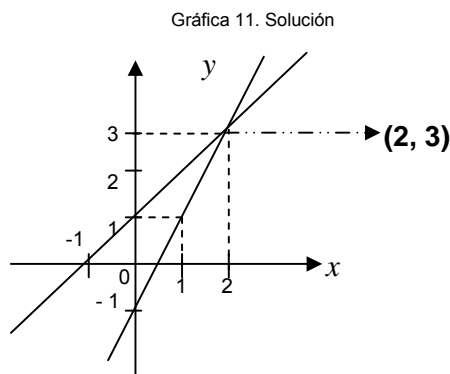
$$y = x + 1$$

x	0	-1
y	1	0

$$y = 2x - 1$$

x	0	1
y	-1	1

Representando gráficamente las parejas ordenadas (x, y) de cada tabla en el plano cartesiano, se trazan las correspondientes rectas para determinar la solución. Observa:



El punto de coordenadas $(2, 3)$ es la intersección de las rectas que son gráficas de las ecuaciones del sistema, entonces la solución es:

$$x=2, \quad y = 3$$

Un sistema que tiene solución única, se llama **sistema determinado, compatible, consistente o independiente** y se caracteriza en que las rectas que son gráficas de las ecuaciones que lo forman, se intersecan exactamente en un solo punto cuyas coordenadas corresponden a la solución del sistema.

Ejemplo

El sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ tiene solución única. Observa:

$$y = \frac{-x+1}{-3}$$

$$y = \frac{-x+8}{4}$$

Las ecuaciones se pueden representar también de la forma:

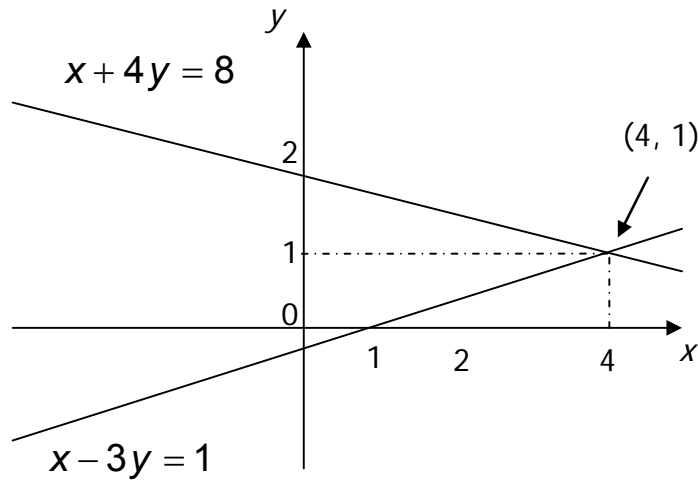
$$y = \frac{-x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{-x}{4} + 2$$

x	1	4
y	0	1

x	0	4
y	2	1

Gráfica 12. Solución



Un sistema de ecuaciones lineales que tiene un número infinito de soluciones se llama **sistema indeterminado o dependiente**, y se caracteriza por que las gráficas de las ecuaciones que lo forman son una misma recta, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ tiene infinitud de soluciones. Observa:

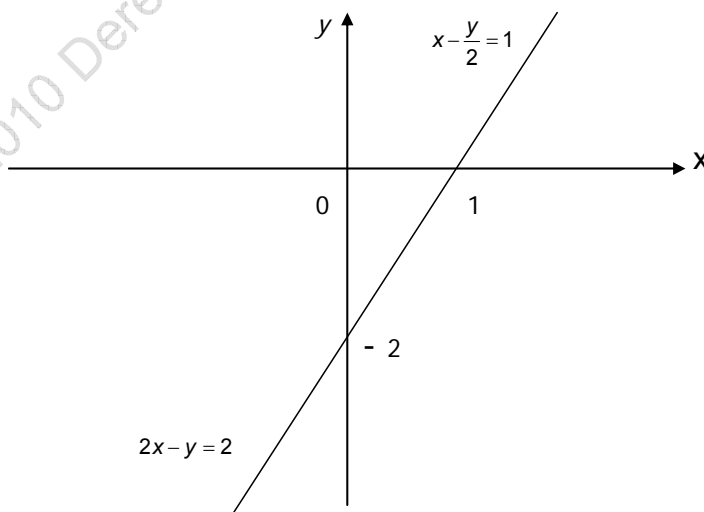
$$y = 2(x - 1)$$

x	0	1
y	-2	0

$$y = 2x - 2$$

x	0	1
y	-2	0

Gráfica 13. Solución



Un sistema que no tiene solución alguna se llama **sistema inconsistente o incompatible**, y se caracteriza en que las gráficas de las ecuaciones que lo forman son rectas paralelas y distintas entre sí.

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ no tiene solución. Observa:

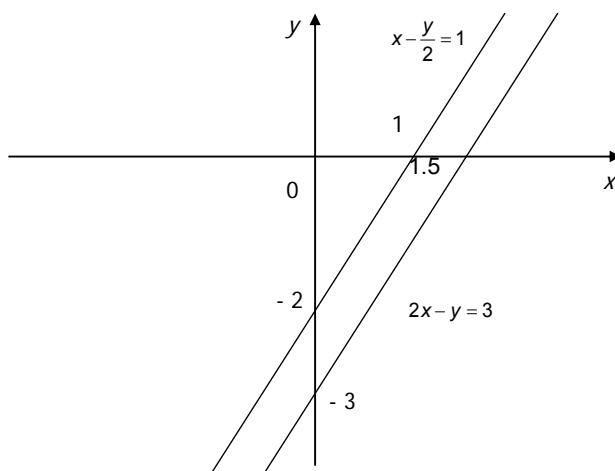
$$y = 2(x - 1)$$

x	0	1
y	-2	0

$$y = 2x - 3$$

x	0	1.5
y	-3	0

Gráfica 14. Solución



1.2.2. Método de Eliminación por Suma y Resta

En éste método se trata de hacer que los coeficientes de una de las incógnitas (puede ser “x” ó “y”) sean iguales pero de signo contrario.

Se emplea cuando coinciden los coeficientes numéricos en una de las dos incógnitas. Si no coinciden, podemos hacerles coincidir multiplicando una o las dos ecuaciones por el factor o factores adecuados.

Ejemplo: Sea el sistema: $\begin{cases} x + 3y = 4 \dots\dots\dots (1) \\ 3x - y = 2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

Multiplicamos la ecuación (1) por (-3), resultando otra EQUIVALENTE.

$$x + 3y = 4 \dots\dots(1)$$

$$-3(x + 3y = 4)$$

$$-3x - 9y = -12 \dots\dots(3)$$

Se suma algebraicamente la ecuación (3) con la (2), quedando:

$$\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ -3x - 9y = -12 \\ \hline 0 - 10y = -10 \end{array}$$

Observa que (3x) se elimina con (-3x) por ser elemento inverso aditivo por lo tanto tendremos:

$$0 - 10y = -10 \quad \text{(ENA)}$$

$$-10y = -10 \quad \text{(PIM)}$$

$$-10y \left(-\frac{1}{10} \right) = -10 \left(-\frac{1}{10} \right) \quad \text{(EIM)}$$

$$y = 1$$

Para encontrar el valor de "x", sustituimos el valor de "y" en la ecuación (2):

$$3x - y = 2 \dots\dots(2)$$

$$3x - 1 = 2 \quad \text{(PIS)}$$

$$3x - 1 + 1 = 2 + 1 \quad \text{(EIA) y reducción de términos}$$

$$3x + 0 = 3 \quad \text{(ENA)}$$

$$3x = 3 \quad \text{(PIM)}$$

$$3x \left(\frac{1}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{3} \right) \quad \text{(EIM)}$$

$$x = 1$$

La solución del sistema de ecuaciones es: $x = 1$ **y** $y = 1$

- **Otro ejemplo:** Sea el sistema: $2x + 3y = 12 \dots\dots(1)$
 $3x - 4y = 1 \dots\dots(2)$

Multiplicamos la ecuación (1) por (4) y la ecuación (2) por (3), resultando otro sistema de ecuaciones EQUIVALENTES.

$$4(2x + 3y = 12)$$

$$3(3x - 4y = 1)$$

$$8x + 12y = 48 \dots\dots(3)$$

$$9x - 12y = 3 \dots\dots(4)$$

Se suma algebraicamente la ecuación (3) con la (4), quedando:

$$\begin{array}{r} 8x + 12y = 48 \\ 9x - 12y = 3 \\ \hline 17x + 0 = 51 \end{array}$$

Observa que (12y) se elimina con (-12y) por ser elemento inverso aditivo, por lo tanto tendremos:

$$17x + 0 = 51 \quad \text{(ENA)}$$

$$17x = 51 \quad \text{(PIM)}$$

$$17x \left(\frac{1}{17} \right) = 51 \left(\frac{1}{17} \right) \quad \text{(EIM)}$$

$$x = 3$$

Para encontrar el valor de "y", sustituimos el valor de "x" en la ecuación (1) o (2), en este caso tomaremos la ecuación (1):

$$2x + 3y = 12 \dots\dots(1)$$

$$2(3) + 3y = 12$$

Multiplicando

$$6 + 3y = 12$$

(PIS)

$$6 + (-6) + 3y = 12 + (-6)$$

(EIA) y reducción de términos

$$0 + 3y = 6$$

(ENA)

$$3y = 6$$

(PIM)

$$3y \left(\frac{1}{3} \right) = 6 \left(\frac{1}{3} \right)$$

(EIM)

$$y = 2$$

La solución del sistema de ecuaciones es: $x = 3$ y $y = 2$

1.2.3. Método de Eliminación por Sustitución

Este método se resume así:

- 1) Se despeja una de las variables de cualquiera de las ecuaciones.
- 2) La variable despejada en el paso 1, se sustituye en la otra ecuación por su correspondiente expresión, y se resuelve la ecuación que resulta.
- 3) El valor de la variable obtenido en el paso 2, se sustituye en la ecuación obtenida en el paso 1.

Ejemplo: Resolver por sustitución el sistema $\begin{cases} x + y = 100 \dots (1) \\ x - y = 70 \dots (2) \end{cases}$

Solución:

1. Despejando a la variable “y” de la ecuación (1) se tiene:

$$y = 100 - x$$

2. Sustituyendo a la variable y por (100 – x) en la ecuación (2) se tiene:

$$x - (100 - x) = 70 \quad (\text{PD})$$

$$x - 100 + x = 70 \quad \text{Reducción de términos}$$

$$2x - 100 = 70 \quad (\text{PIS})$$

$$2x - 100 + 100 = 70 + 100 \quad (\text{EIA}) \text{ y reducción de términos}$$

$$2x + 0 = 170 \quad (\text{ENA})$$

$$2x = 170 \quad (\text{PIM})$$

$$2x \left(\frac{1}{2} \right) = 170 \left(\frac{1}{2} \right) \quad (\text{EIM})$$

$$x = 85$$

3. Sustituyendo a la variable x por (85) en la ecuación del paso 1 se obtiene el valor de y:

$$y = 100 - x$$

$$y = 100 - 85, \text{ por lo tanto}$$

$$y = 15$$

La solución del sistema de ecuaciones es: $x = 85$ y $y = 15$

1.2.4. Método de Eliminación por Igualación

El procedimiento de este método se resume así:

1. De cada ecuación se despeja la misma variable.
2. Se igualan las expresiones obtenidas en el paso 1 y se resuelve la ecuación que resulta.
3. El valor de la variable obtenido en el paso 2, se sustituye en una de las ecuaciones obtenida en el paso 1.

Ejemplo: Resolver por igualación el sistema $\begin{cases} x + 3y = 4 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - y = 2 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

1. Despejamos "x" en ambas ecuaciones, quedando:

$$x = 4 - 3y \dots\dots\dots(1bis)$$

$$x = \frac{2 + y}{3} \dots\dots\dots(2bis)$$

2. Como $x = x$, las dos expresiones resultantes deben ser iguales, por lo que, se igualan las expresiones obtenidas en el paso 1, y se resuelve la ecuación que resulta.

$$4 - 3y = \frac{2 + y}{3} \quad \text{(EIM)}$$

$$3(4 - 3y) = 3\left(\frac{2 + y}{3}\right) \quad \text{(PD) y (EIM)}$$

$$12 - 9y = 2 + y \quad \text{(PIS)}$$

$$12 + (-12) - 9y = 2 + y + (-12) \quad \text{(EIA) y reducción de términos}$$

$$0 - 9y = -10 + y \quad \text{(ENA)}$$

$$-9y = -10 + y \quad \text{(PIS)}$$

$$-9y + (-y) = -10 + y + (-y) \quad \text{(EIA) y reducción de términos}$$

$$-10y = -10 + 0 \quad \text{(ENA)}$$

$$-10y = -10 \quad \text{(PIM)}$$

$$-10y\left(-\frac{1}{10}\right) = -10\left(-\frac{1}{10}\right) \quad \text{(EIM)}$$

$$y = 1$$

3. Sustituyendo el valor de la variable “y” obtenido en el paso 2, se sustituye en una de las ecuaciones obtenida en el paso 1, en este caso, sustituyendo ese valor en la ecuación (1 bis):

$$x = 4 - 3y \dots\dots (1bis)$$

$$x = 4 - 3(1)$$

$$x = 4 - 3, \text{ por lo tanto}$$

$$x = 1$$

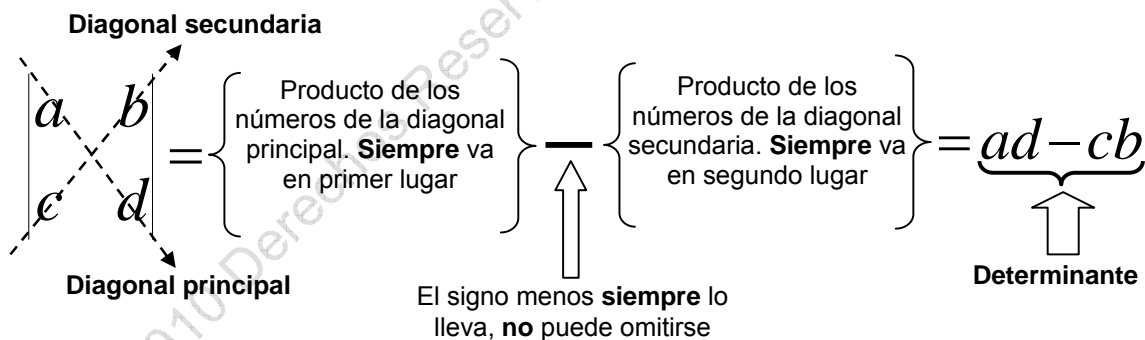
La solución del sistema de ecuaciones es: $x = 1$ y $y = 1$

1.2.5. Método por Determinantes

Para aplicar este método es necesario que el sistema de ecuaciones esté **ordenado**.

Antes de aplicar este método es necesario, saber qué es una **matriz** y una **determinante**. La primera es un arreglo numérico rectangular, consta de filas y columnas; una matriz de dos por dos o de segundo orden es un arreglo numérico que consta de dos filas y dos columnas. Es cuadrado porque tiene el mismo número de filas y de columnas. El valor que resulta se llama determinante.

El **determinante** de una matriz de orden dos se escribe y se calcula así:



En otras palabras, al producto de los elementos de la diagonal principal se le resta el producto de los otros dos (diagonal secundaria).

Ejemplo:

Obtenga el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (-2)(4) = -15 - (-8) = -15 + 8 = -7$$

Determinante

Esta forma de resolver un determinante, nos proporciona un método rápido para resolver sistemas de ecuaciones 2 x 2, que se llama la **regla de Cramer**.

REGLA DE CRAMER

Dado el sistema de ecuaciones, ordenado, se procede a aplicar la regla de Cramer.

Esta, consiste en tomar los coeficientes numéricos en el orden en que están y por esto, el sistema debe estar ordenado, para formar las matrices como se indica.

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}$$

Se aplica la regla de Cramer, construyendo los determinantes con los coeficientes del sistema.

Determinante del sistema, D

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Determinante para la variable x , D_x

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Determinante para la variable y , D_y

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

El valor de la incógnita se obtiene realizando el cociente entre el determinante de la variable y el determinante del sistema, por lo que el **cálculo de “x” y de “y”, será:**

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Ejemplo: Resolver por determinantes el sistema: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(2) - (1)(-2)}{(1)(2) - (3)(-2)} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(1) - (3)(3)}{(1)(2) - (3)(-2)} = \frac{-8}{8} = -1$$

La solución del sistema de ecuaciones es:

$$x = 1, \quad y = -1$$

Aquí has aprendido a resolver sistemas de ecuaciones algebraicas que contienen dos variables, también has comprobado que resolver sistemas de ecuaciones algebraicas con dos variables no es difícil, y además hay varios métodos posibles. El mejor método que deberemos utilizar en un sistema dado, dependerá de las ecuaciones que tengamos.

Cuando se te presente un sistema de ecuaciones con dos incógnitas en alguna problemática situada, **elige un método** que tú consideres más fácil para el sistema que se forme.

El método gráfico es solo aproximado. No se debe utilizar a menos que específicamente se te diga que lo hagas.

Ahora, retomemos de nuevo nuestro problema “**la basura si importa**” y resolvamos las preguntas 5 y 6.

- 5) Si el Colegio Plantel 03 “Iztacalco”, tiró en el turno matutino y el vespertino en una semana 1050Kg de desechos, y si en el turno matutino se tiró 105Kg más que el vespertino, ¿Qué cantidad en promedio se tiró de desecho en la semana en cada turno?

Comenzaremos planteando el modelo matemático de esta situación:

Observa que el problema esta considerando **dos incógnitas** (turno matutino y turno vespertino).

Datos:

x = turno matutino

y = turno vespertino

1050Kg de desechos tirados en los dos turnos en una semana

Cantidad de basura del turno matutino mas 105Kg = Cantidad de basura del turno vespertino

Observa que con los datos dados se forman dos ecuaciones, por lo tanto, el **modelo matemático** quedara expresado como:

$$x + y = 1050\text{Kg} \dots\dots\text{Ecuación 1}$$

$$x + 105\text{Kg} = y \dots\dots\text{Ecuación 2}$$

Existen problemas en los que es necesario encontrar dos o tres datos que están relacionados, y al traducirlos al lenguaje algebraico se forman dos o tres ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas. En estos casos decimos que se forma un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones se puede solucionar por el método gráfico y los métodos analíticos, los cuales aprendiste anteriormente.

Retomando el problema y reacomodando términos de la ecuación 2 nos quedara el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = 1050 \dots\dots\text{Ecuación 1}$$

$$x - y = -105 \dots\dots\text{Ecuación 2}$$

Para encontrar el valor de las dos incógnitas utilizaremos en este caso por conveniencia el método de Reducción (suma y resta), por lo que:

$$\begin{array}{r} x + y = 1050 \\ x - y = -105 \\ \hline 2x + 0 = 945 \end{array} \quad \text{(ENA)}$$

$$2x = 945 \quad \text{(PIM)}$$

$$2x \left(\frac{1}{2} \right) = 945 \left(\frac{1}{2} \right) \quad \text{(EIM)}$$

$$x = 472.5$$

Para determinar el valor de la incógnita “ y ”, sustituimos el valor encontrado de “ x ” en cualquiera de las dos ecuaciones que tenemos, en este caso tomemos la ecuación 1:

$$x + y = 1050 \dots\dots\text{Ecuación 1}$$

$$472.5 + y = 1050$$

$$472.5 + y = 1050 \quad (\text{PIS})$$

$$472.5 + (-472.5) + y = 1050 + (-472.5) \quad (\text{EIA}) \text{ y reducción de términos}$$

$$0 + y = 577.5 \quad (\text{ENA})$$

$$y = 577.5$$

Respondemos a la pregunta realizada:

$x = 472.5$ Kg. de desechos tirados en la semana en el turno Matutino.

$y = 577.5$ Kg. de desechos tirados en la semana en el turno Vespertino.

- 6) Si en una semana el Plantel 01 "El Rosario" y el Plantel 20 "Del Valle" tiran 1230Kg de desechos y si el Plantel 01 tira el doble menos 100Kg de desecho que el Plantel 20 ¿Cuánto tira cada uno de ellos?

Para responder a esta pregunta, hagamos un planteamiento similar al anterior:

Comencemos planteando el modelo matemático de esta situación:

Datos:

$x =$ Plantel 01

$y =$ Plantel 20

1230Kg de desechos tirados en los dos Planteles

El doble de cantidad de basura que tira el Plantel 20 menos 100Kg = Cantidad de basura que tira el Plantel 01

Observa que con los datos dados se forman dos ecuaciones, por lo tanto, el modelo matemático quedara expresado como:

$$x + y = 1230\text{Kg} \dots\dots\text{Ecuación 1}$$

$$2y - 100\text{Kg} = x \dots\dots\text{Ecuación 2}$$

Reacomodando términos de la ecuación 2 nos quedara el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = 1230 \text{Kg} \dots\dots \text{Ecuación 1}$$

$$-x + 2y = 100 \text{Kg} \dots\dots \text{Ecuación 2}$$

Utilizando el método de Reducción (suma y resta), tenemos:

$$\begin{array}{r} x + y = 1230 \\ -x + 2y = 100 \\ \hline 0 + 3y = 1330 \end{array} \quad \text{(ENA)}$$

$$3y = 1330 \quad \text{(PIM)}$$

$$3y \left(\frac{1}{3} \right) = 1330 \left(\frac{1}{3} \right) \quad \text{(EIM)}$$

$$y = 443.33$$

Para determinar el valor de la incógnita “x”, sustituimos el valor encontrado de “y” en cualquiera de las dos ecuaciones que tenemos, tomemos la ecuación 1:

$$x + y = 1230 \dots\dots \text{Ecuación 1}$$

$$x + 443.33 = 1230 \quad \text{(PIS)}$$

$$x + 443.33 - 443.33 = 1230 - 443.33 \quad \text{(EIA) y reducción de términos}$$

$$x + 0 = 786.67 \quad \text{(ENA)}$$

$$x = 786.67$$

Por lo que tendremos:

$x = 786.67$ Kg. de desechos tirados en la semana en el Plantel 01 “El Rosario”.

$y = 443.33$ Kg. de desechos tirados en la semana en el Plantel 20 “Del Valle”.

Para consolidar más este conocimiento de las preguntas 5 y 6, resuelve en tu cuaderno estas mismas situaciones con los diferentes métodos de solución que conoces, si tienes problemas revisa el apartado de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 20

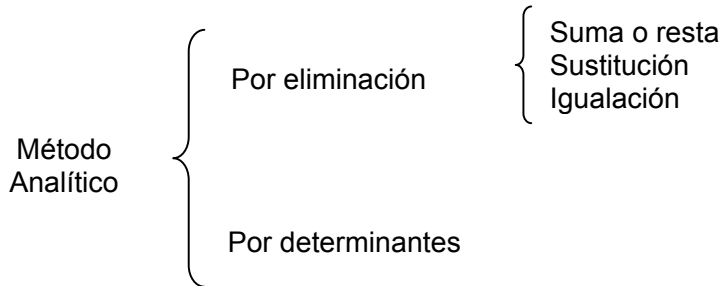
Sabemos que la Ciudad de México esta dividida en las regiones Centro, D. F., Norte, Sur y Frontera Norte, con esta información contesta las siguientes preguntas utilizando sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

- 1) Si la región del norte y la del sur tiran entre las dos 25,844 toneladas diarias de basura y si el doble de la región del sur menos 1,846 toneladas es igual a la de la región del norte ¿Qué cantidad diaria tirara cada una de ellas?
- 2) Si las Zonas metropolitanas y las Ciudades medianas generan entre las dos 71,994 toneladas de la basura que se tira en la Ciudad de México y si las tres quintas partes de la Basura que tiran diariamente las Zonas metropolitanas menos 3,686 toneladas es lo que tiran las Ciudades medianas ¿Qué cantidad diaria tiraran cada una de ellas?

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres del Estado de México

RESUMEN

En este apartado aprendiste que hay problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones, con dos incógnitas; los métodos que estudiaste son:



Para aplicar cualquier método debemos.

- Identificar los datos conocidos.
- Identificar los datos desconocidos
- Traducir el problema del lenguaje común, al lenguaje algebraico.
- Construir nuestro sistema de ecuaciones simultáneas

A partir de aquí, debemos seleccionar el método por el que solucionaremos el sistema y aplicar los pasos correspondientes.

En la siguiente tabla se hace un resumen sobre los pasos a seguir en cada método para proceder a resolver el sistema.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para que puedas comparar tus resultados se muestran los resultados que debiste de obtener.

1)

x = Región del norte

y = Región del sur

El sistema de ecuaciones del modelo matemático es:

$$x + y = 25,844$$

$$-x + 2y = 1846$$

Resolviendo por algún método de los que se estudio, tenemos:

x = 16,614 toneladas de basura que se tiran diariamente en la región del norte

y = 9,230 toneladas de basura que se tiran diariamente en la región del sur

2):

x = Zonas metropolitanas

y = Ciudades medianas

El sistema de ecuaciones del modelo matemático es:

$$x + y = 71,994$$

$$x + y = 71,994$$

ó

$$\frac{3}{5}x - y = 3686$$

$$0.6x + y = 71,994$$

Resolviendo por algún método de los que se estudio, tenemos:

x = 47,300 toneladas de basura que se tiran diariamente en las Zonas metropolitanas

y = 24,694 toneladas de basura que se tiran diariamente en las Ciudades medianas

POR SUMA Y RESTA	POR SUSTITUCION	POR IGUALACION	POR DETERMINANTES
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ordenar las ecuaciones. ▪ Si es necesario multiplicar una o las dos ecuaciones por el coeficiente de las variables de la otra ecuación. ▪ Sumar o restar las ecuaciones. ▪ Resolver la ecuación que resulta. ▪ Sustituir el valor de la variable en una de las ecuaciones lineales. ▪ Como recomendación, comprobar los valores encontrados. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones. ▪ Sustituir en la otra ecuación la variable despejada. ▪ Resolver la ecuación. ▪ Sustituir el valor de la variable en la ecuación despejada. ▪ Como recomendación, comprobar los valores encontrados. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Despejar en ambas ecuaciones la misma variable. ▪ Igualar las ecuaciones despejadas y solucionar la igualación. ▪ Sustituir el valor encontrado en las ecuaciones despejadas. ▪ Como recomendación, comprobar los valores encontrados. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Si es necesario, hacer las operaciones para que las ecuaciones queden de la forma: $a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ ▪ Formar la matriz del determinante (D) y resolverla. ▪ Para determinar las variables "x" y "y" se resuelve el determinante de cada variable y se divide entre la matriz del determinante: $x = \frac{D_x}{D}$ $y = \frac{D_y}{D}$

1.3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Hasta aquí hemos analizado el procedimiento para solucionar un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Ahora revisaremos la solución de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas; para lo cual aplicaremos el método de determinantes.

Primeramente veamos como resolver un determinante de tercer orden (3 x 3), este se calcula mediante la **regla de Sarrus**:

REGLA DE SARRUS:
 La matriz de tercer orden (3 x 3) se resuelve añadiendo las dos primeras filas debajo de la tercera.

$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array}$	=	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de los Productos} \\ \text{de los números de las} \\ \text{Diagonales Principales} \end{array} \right\}$	-	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de los Productos} \\ \text{de los números de las} \\ \text{Diagonales Secundarias} \end{array} \right\}$
$= (a)(e)(i) + (d)(h)(c) + (g)(b)(f) - (g)(e)(c) - (a)(h)(f) - (d)(b)(i)$				

(Diagonales Principales)
 (Diagonales Secundarias)

El resultado es lo que se llama **DETERMINANTE**

Ejemplo: determine el **determinante** de la siguiente matriz 3 x 3:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Solución: se duplican los renglones 1 y 2 y se resuelve el determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (5)(-1)(-3) + (3)(2)(-3) + (4)(3)(0) - (4)(-1)(-3) - (5)(2)(0) - (3)(3)(-3)$$

Por lo tanto:

$$D = 15 - 18 + 0 - 12 - 0 + 27$$

$$D = 12$$

Para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, utilizaremos la regla de Cramer para sistemas 3×3 .

Regla de Cramer para sistemas 3×3 .

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Donde:

D = Determinante del sistema

D_x = Determinante de la variable "x"

D_y = Determinante de la variable "y"

D_z = Determinante de la variable "z"

Por lo tanto, tendremos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Entonces obtenemos que para encontrar los valores de "x", "y" y "z" tenemos los determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Observa que el denominador de las tres variables es el mismo y que en el numerador la constante sustituye al coeficiente de la incógnita que se está buscando.

Otro aspecto que es importante puntualizar, es que en la resolución de los determinantes los productos que van “hacia abajo” son positivos y los que van “hacia arriba” son negativos.

Regresemos a nuestro problema “**la basura si importa**” y demos solución a la última pregunta que nos plantean.

- 7) Si cada día, en el Colegio de Bachilleres se tira en promedio 2205Kg de desechos de papel, plástico y latas de aluminio y en promedio el desecho de papel menos 105Kg es igual al desecho de los otros dos y se sabe que el Kilo de papel se paga a \$0.30, el plástico a \$1.25 y el aluminio a \$15.00 y por la venta de lo que se tira de estos materiales, se recibe una cantidad de \$5509.00, ¿Cuántos kilos de desecho de cada material se están tirando diariamente?

Comencemos planteando el modelo matemático de esta situación:

Datos:

Se desecha diariamente en promedio 2205Kg de desechos de papel, plástico y latas de aluminio

x = desecho de papel

y = desecho de plástico

z = desecho de aluminio

En promedio el desecho de papel **menos** 105Kg es **igual** al desecho de los otros dos

Se paga en promedio a \$0.30 el kilo de papel

Se paga en promedio a \$1.25 el kilo de plástico

Se paga en promedio a \$15.00 el kilo de aluminio

Por la venta de lo que se tira de estos materiales, se recibe una cantidad de \$5509.00,

Con los datos dados formamos el siguiente modelo matemático:

$$x + y + z = 2205 \text{Kg} \dots\dots\dots \text{Ecuación 1}$$

$$x - 105 \text{Kg} = y + z \dots\dots\dots \text{Ecuación 2}$$

$$\$0.30x + \$1.25y + \$15.00z = \$5509.00 \dots\dots \text{Ecuación 3}$$

Reacomodando términos de la ecuación 2 nos quedara el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$x + y + z = 2205 \dots\dots\dots \text{Ecuación 1}$$

$$x - y - z = 105 \dots\dots\dots \text{Ecuación 2}$$

$$0.30x + 1.25y + 15.00z = 5509.00 \dots\dots \text{Ecuación 3}$$

Para la solución de problemas que dan lugar a sistema de ecuaciones con tres incógnitas, se recomienda utilizar el método por determinantes.

Primeramente se calcula el determinante delta (D) (se forma con los coeficientes de las incógnitas):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0.30 & 1.25 & 15 \end{vmatrix}$$

Para desarrollarlo, repetimos debajo de la tercera fila, las dos primeras:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0.30 & 1.25 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Resolvemos el determinante, recuerda que los productos se hacen diagonalmente y los que van "hacia abajo" son positivos y los que van "hacia arriba" son negativos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0.30 & 1.25 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto tenemos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0.30 & 1.25 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)(15) + (1)(1.25)(1) + (0.30)(1)(-1) - ((0.30)(-1)(1) - (1)(1.25)(-1) - (1)(1)(15))$$

Desarrollando los productos, queda:

$$D = -15 + 1.25 - 0.30 + 0.30 + 1.25 - 15$$

Por lo tanto, tenemos:

$$D = -27.5$$

Para obtener los valores de "x", "y" y "z", colocamos los resultados de las ecuaciones en la columna correspondiente a la variable que se quiera calcular y se resuelve el determinante que se forma dividiéndolo entre el valor del determinante delta (D) que acabamos de encontrar.

Por lo tanto, para cada variable tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2205 & 1 & 1 \\ 105 & -1 & -1 \\ 5509 & 1.25 & 15 \\ 2205 & 1 & 1 \\ 105 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-27.5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2205 & 1 \\ 1 & 105 & -1 \\ 0.30 & 5509 & 15 \\ 1 & 2205 & 1 \\ 1 & 105 & -1 \end{vmatrix}}{-27.5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2205 \\ 1 & -1 & 105 \\ 0.30 & 1.25 & 5509 \\ 1 & 1 & 2205 \\ 1 & -1 & 105 \end{vmatrix}}{-27.5}$$

Resolviendo para cada una de ellas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2205 & 1 & 1 \\ 105 & -1 & -1 \\ 5509 & 1.25 & 15 \\ 2205 & 1 & 1 \\ 105 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-27.5} = \frac{-33075 + 131.25 - 5509 + 5509 + 2756.25 - 1575}{-27.5} = \frac{-31762.5}{-27.5}$$

Por lo tanto el valor de la incógnita "x", queda:

$$x = 1155$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2205 & 1 \\ 1 & 105 & -1 \\ 0.30 & 5509 & 15 \\ 1 & 2205 & 1 \\ 1 & 105 & -1 \end{vmatrix}}{-27.5} = \frac{1575 + 5509 - 661.5 - 31.5 + 5509 - 33075}{-27.5} = \frac{-21175}{-27.5}$$

Por lo tanto el valor de la incógnita "y", queda:

$$y = 770$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2205 \\ 1 & -1 & 105 \\ 0.30 & 1.25 & 5509 \\ 1 & 1 & 2205 \\ 1 & -1 & 105 \end{vmatrix}}{-27.5} = \frac{-5509 + 2756.25 + 31.5 + 661.5 - 131.25 - 5509}{-27.5} = \frac{-7700}{-27.5}$$

Por lo tanto el valor de la incógnita "z", queda:

$$z = 280$$

Por lo tanto los kilos de desecho de cada material que se están tirando diariamente, serán:

$x = 1155$ Kg. de desecho de **papel** que se tira diariamente

$y = 770$ Kg. de desecho de **plástico** que se tira diariamente

$z = 280$ Kg. de desecho de **latas de aluminio** que se tira diariamente

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 21

Ahora que ya sabes resolver sistemas de ecuaciones con tres incógnitas, realiza el procedimiento del siguiente problema y sigue los pasos aprendidos para determinar su solución.

Si cada día, en el Distrito Federal se tira en promedio 4,560 toneladas de “desechos de papel y cartón”, “plástico” y “latas de aluminio” y en promedio el desecho de “papel y cartón” menos 720 toneladas es igual al desecho de los otros dos y se sabe que el Kilo de “papel y cartón” se paga a \$0.30, el “plástico” a \$1.25 y el “aluminio” a \$15.00 aproximadamente y por la venta de lo que se tira de estos materiales, se podría recibir una cantidad aproximada de \$9,792,000.00 ¿Cuántos kilos de desecho de cada uno de estos materiales se están tirando diariamente?

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres

RESUMEN

En el último tema estudiaste la solución de problemas que dan lugar a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas; para lo cual se vio el método de determinantes.

La ecuación lineal general con tres incógnitas es de la forma:

$$a x + b y + c z = d$$

Un sistema con tres incógnitas se forma por tres ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

El determinante del sistema se forma con los coeficientes de las incógnitas:

$$\text{denominador} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, utilizamos la regla de Cramer para sistemas 3 x 3.

Con lo que aprendiste en este bloque podrás resolver problemas de la vida cotidiana utilizando el álgebra.

AUTOEVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Para que puedas comparar tus resultados se muestran los resultados que debiste de obtener, así como el procedimiento que debiste seguir.

Datos:

x = Desecho de papel y cartón

y = Desecho de plástico

z = Desecho de latas de aluminio

El sistema de ecuaciones del modelo matemático es:

$$x + y + z = 4,560$$

$$x - y - z = 720$$

$$0.30x + 1.25y + 15z = 9,792,000$$

Resolviendo por método de determinantes, tenemos:

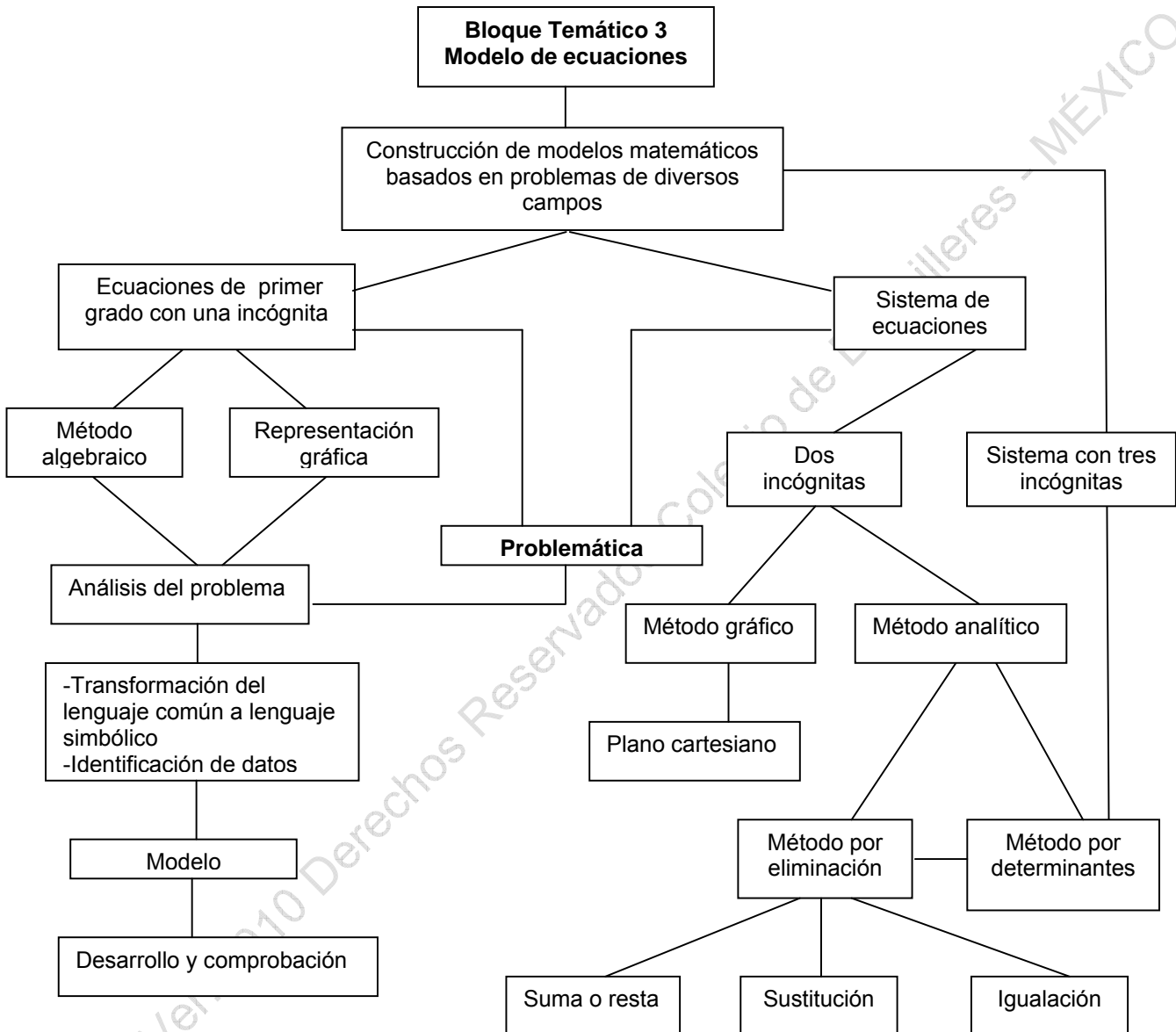
x = 2,640 toneladas se tiran diariamente de desecho de papel y cartón

y = 1440 toneladas se tiran diariamente de desechos de plástico

z = 480 toneladas se tiran diariamente de desechos de latas de aluminio

RECAPITULACIÓN

El siguiente esquema te ayudará a recordar cada uno de los temas que se revisaron en este bloque:



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Este apartado tiene la finalidad de que ejercites y apliques todo lo que aprendido a lo largo de este bloque:

1. Para poder resolver el siguiente crucigrama tendrás que resolver 17 ecuaciones de primer grado ¡Anímate!

	1		2		3	
4						
5				6		
7	9		8			
10			12	13	15	
				14		
11						16

Horizontales

3) $7x - 4 = 171$

4) $8x - 920 = 7,080$

6) $\frac{1}{2}x + 8 = 88$

7) $5x = 35,745$

10) $4x - 4 = 3x + 6$

11) $\frac{5}{2}x + 40 = 500$

12) $\frac{x}{9} - 43 = 1,000$

14) $\frac{x}{7} - 5 = 0$

16) $5x - 4x + 3x + 8 = 8$

Verticales

1) $3x + 2 = 32$

2) $\frac{x}{5} = 16$

3) $2x + 8 = 440$

5) $2x - 9 = x + 18$

8) $9x + 9 = 900$

9) $\frac{1}{4}x - 2 = 250$

13) $\frac{x}{3} - 11 = x - 233$

15) $x + 5 = 2x - 80$

¿Qué tal, resultó divertido?

2. Resuelve el siguiente problema algebraicamente e interprétalo gráficamente indicando el punto donde la línea recta intersecta al eje "x" de las abscisas.

Un carpintero debe hacer marcos rectangulares, y para ello cuenta con tiras de madera cuya longitud es de 75cm. Si el largo del marco debe ser 15cm mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones de los marcos?

3. Establece el modelo algebraico y la solución de los siguientes problemas:

- El costo total de cinco libros de texto y cuatro cuadernos de trabajo es de \$648.00; el costo de otros seis libros de texto iguales y tres cuadernos es de \$756.00. ¿Cuál es el costo de cada artículo?
- En Inglaterra, 12libras de papas y seis de arroz cuestan 7.32 dólares, mientras que nueve libras de papas y 13 de arroz cuestan 9.23 dólares. ¿Cuál es el precio por libra de cada producto?
- La renta y los ahorros del Sr. González hacen un total mensual de \$1,000.00. Si ahorrará \$50.00 más al mes, sus ahorros serán la mitad de su renta. ¿Cuál es su renta?
- Un equipo de béisbol compró 7 bates y 5 pelotas en \$590.00. Después compró 3 bates y 6 pelotas en \$330.00 ¿cuál es el precio de cada objeto?
- El promedio de 2 números es $\frac{5}{48}$. Un cuarto de su diferencia es $\frac{1}{96}$. Hallar los dos números.

4. Resuelve los siguientes problemas

- En una peluquería el corte de cabello cuesta \$25.00 para caballero, \$20.00 para niño y \$30.00 para dama. Se lleva 20 minutos hacer un corte para caballero, 15 minutos para niño y 30 minutos para dama y tiene de clientes el quíntuplo de hombres que de mujeres. La peluquería da servicio de las 10:00 a.m. a las 20:00 p.m. y emplea 45 minutos para la comida. Si en un día se recogieron \$685.00; entonces, ¿Cuántos hombres, mujeres y niños fueron a cortarse el cabello ese día?
- En una fábrica de lápices trabajan 8 obreros, 2 supervisores y 1 ingeniero en la preparación de la materia prima; entre todos ganan \$30000.00 mensuales. En la elaboración de las puntillas se emplean 14 obreros, 3 supervisores y 2 ingenieros que ganan entre todos \$52600.00 mensuales. Y en el empaquetado laboran 7 obreros con 1 supervisor ganando entre los ocho \$16400.00 al mes. Si todos los obreros ganan lo mismo, así como por su parte todos los supervisores e ingenieros también; entonces, ¿Cuál es el sueldo mensual de cada obrero, de cada supervisor y de cada ingeniero?

Para verificar que tus respuestas sean las correctas, revisa el siguiente apartado denominado Autoevaluación.

AUTOEVALUACIÓN

Con la siguiente rúbrica evalúa el proceso que seguiste para resolver las Actividades de Consolidación.

CATEGORÍA	Excelente	Bueno	Regular
Organización	La solución a la actividad se presenta de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	La solución a la actividad se presenta de una manera ordenada y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	La solución a la actividad se presenta en una manera organizada, pero puede ser difícil de leer.
Terminología matemática y notación	La terminología y notación se utilizaron de forma adecuada para hacer más fácil de comprender el resultado.	La terminología y notación, por lo general, se utilizaron de forma adecuada e hicieron comprensible el resultado.	La terminología y notación, no fueron utilizadas de manera adecuada por lo que es confuso el resultado.
Errores	Del 90 al 100% de los pasos y soluciones no presentaron errores matemáticos.	Casi todos (80-89%) los pasos y soluciones no presentaron errores matemáticos.	La mayor parte (70-80%) de los pasos y soluciones no presentaron errores matemáticos.
Procedimientos	Por lo general, usaste una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usaste una estrategia efectiva para resolver problemas.	Usaste una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no la seguiste frecuentemente consistentemente.
Conclusión	Todos los problemas fueron resueltos.	Todos menos 1 de los problemas fueron resueltos.	Todos menos 2 de los problemas fueron resueltos.

Para verificar que tus respuestas a las actividades de consolidación fueron correctas, a continuación te presentamos la solución de cada una de ellas, compáralas con las que obtuviste. Si encuentras alguna diferencia realiza nuevamente el ejercicio.

1. Solución del crucigrama:

	1		8		2	5
4	1	0	0	0		1
5	9				6	1
7	7	9	1	4	8	9
10	1	0			12	9
					13	3
		0			14	3
11	1	8	4			16
						3
						0

2. Modelo matemático: $2x + 2(x + 15) = 75$

Punto de intersección del eje "x": (11.25, 0)

Dimensiones:

El largo es 26.25cm

El ancho es 11.25cm

3. Solución de los problemas:

a)

libros = x

cuadernos = y

Modelo matemático:

$$5x + 4y = 648$$

$$6x + 3y = 756$$

Por lo tanto, cada libro cuesta \$120.00 y cada cuaderno \$12.00

b)

$papas = p$

$arroz = a$

Modelo matemático: $12p + 6a = 7.32$
 $9p + 13a = 9.23$

Por lo tanto, cada libra de papa cuesta 0.39Dls y cada libra de arroz 0.44Dls.

c)

Modelo matemático: $x + y = 1000$
 $y + 50 = \frac{x}{2}$

Por lo tanto, la renta es \$700.00.

d)

Modelo matemático: $7x + 5y = 590$
 $3x + 6y = 330$

Por lo tanto, el precio del bate es \$70.00 y el de la pelota es \$20.00.

e)

Modelo matemático: $\frac{x + y}{2} = \frac{5}{48}$
 $\frac{x - y}{4} = \frac{1}{96}$

Por lo tanto, los números son: $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$.

4. Solución de los problemas.

a)

Incógnitas:

Nº de caballeros = x

Nº de niños = y

Nº de damas = z

Modelo matemático: $20x + 15y + 30z = 555$(1)
 $25x + 20y + 30z = 685$(2)
 $x - 5z = 0$(3)

Por lo tanto, $x = 15$ caballeros; $y = 11$ niños; $z = 3$ damas.

La solución nos indica que en un día se cortaron el cabello 15 hombres, 11 niños y 3 damas en un tiempo de 555 minutos, obteniendo la cantidad de \$685.00.

b)

Modelo matemático:

$$8x + 2y + z = 30000 \dots\dots\dots (1)$$
$$14x + 3y + 2z = 52600 \dots\dots\dots (2)$$
$$7x + y = 16400 \dots\dots\dots (3)$$

Por lo tanto: Mensualmente cada obrero gana \$1800.00, cada supervisor \$3800.00 y cada ingeniero \$8000.00

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

GLOSARIO

Este apartado te ayudará a que puedas conocer el significado de algunos términos que se utilizaron a lo largo del material.

Ácaro.-Son un orden de artrópodos que pertenecen a la clase Arachnida.

Antivirales.-Son tipos de medicamentos usados para el tratamiento de infecciones producidas por virus.

Ecuación: Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas *miembros*, en las que aparecen valores conocidos o *datos*, y desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud se haya establecido como resultado de otras operaciones. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar.

Ecuaciones equivalentes: Dos o más ecuaciones que admiten la misma solución.

Ecuación lineal: Es una que representa la expresión de una función lineal.

Ecuación numérica: Es la ecuación en cuyos términos no existen más letras que las correspondientes a las incógnitas.

Ecuación de primer grado: Una ecuación de primer grado o ecuación lineal es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia. En el sistema cartesiano representan rectas.

Enésimo.-Se dice del número indeterminado de veces que se repite una cosa.

Sistema de ecuaciones: En las matemáticas, un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. Una solución para el sistema debe proporcionar un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción. En otras palabras el valor que reemplazamos en las incógnitas debe hacer cumplir la igualdad del sistema. Las incógnitas se suelen representar utilizando las últimas letras del alfabeto latino, o si son demasiadas, con subíndices.

Grado de una ecuación: Es el valor del exponente mayor que aparece en las incógnitas de la ecuación.

Igualdad: Es una expresión algebraica compuesta por dos miembros separados por el signo "=" .

Incógnitas: Son las letras que figuran en la ecuación y de cuyo valor depende que se cumpla con la igualdad.

Inscrito.- Es aquello o aquella que se dibuja en su interior y que toca todos sus lados.

Intuitivo (va).-Pertenece o relativo a la intuición. Se dice de la persona en la que actúa la intuición en mayor grado que el razonamiento.

Micra.- Medida de longitud equivalente a una millonésima parte del metro.

Nomenclatura.-Conjunto de términos técnicos de una ciencia o especialidad.

Prescindir.-Dejar de tener, disfrutar o usar una cosa.

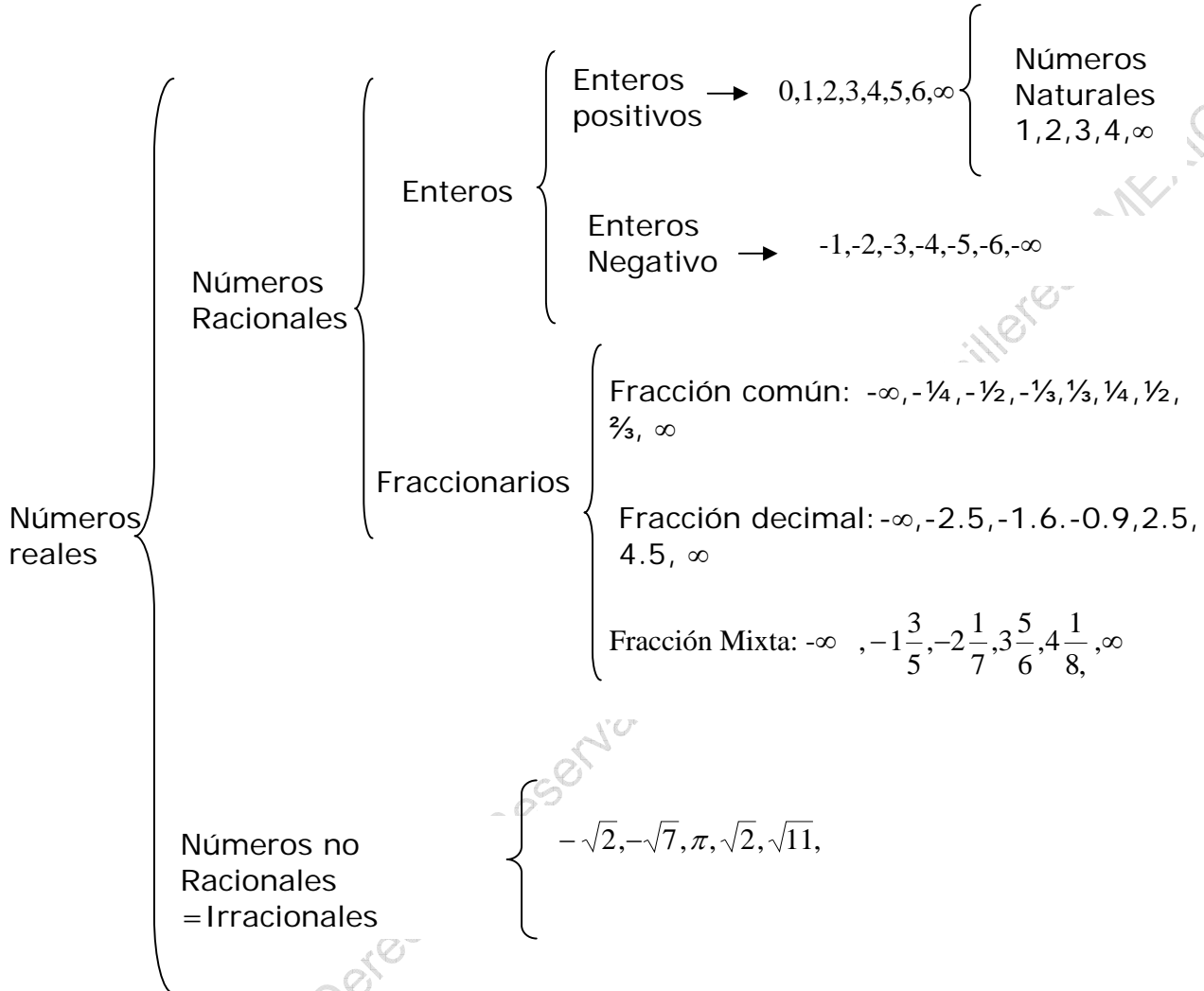
Recuento.-Acción y efecto de contar el número de personas o cosas que forman un conjunto.

Virus.-Microorganismo no celular, capaz de reproducirse en el seno de células vivas. Es causa de muchas enfermedades.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

ANEXO

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES



PROPIEDADES DE CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES.

Los siguientes axiomas son proposiciones formales para las propiedades de la adición y multiplicación en \mathbb{R} .

Axiomas de la adición	
Cerradura	Para todo a y b en \mathbb{R} , $(a+b)$ está en \mathbb{R} y $a+b$ es única (esto quiere decir que la suma es cerrada, si sumamos dos o más números reales el resultado es otro número real y al sumar dos números reales el resultado es único, no puede tener dos resultados distintos).
Asociatividad	Para todo a , b y c en \mathbb{R} , $(a+b)+c = a+(b+c)$ (esto quiere decir que no importa como se asocien tres números reales para realizar la suma, el resultado es el mismo).
Existencia del idéntico	Existe en \mathbb{R} un único elemento cero (0) con la propiedad de que para todo a en \mathbb{R} , $a+0=a$ y $0+a=a$. Ejemplo: $3+0=3$ y $0+3=3$.
Existencia de los inversos	Para cada a en \mathbb{R} , existe un elemento $-a$ en \mathbb{R} tal que, $a+(-a)=0$ y $(-a)+a=0$. Ejemplo: $5+(-5)=0$ y $(-5)+5=0$.
Conmutatividad	Para todo a y b en \mathbb{R} , $a+b = b+a$ (el orden de los sumandos no altera la suma). Ejemplo: $3+2=2+3$.

El número $-a$ se llama inverso aditivo o simétrico de a . Así, el inverso aditivo de 5 es -5 y el inverso aditivo de -5 es 5 .

Axiomas de la multiplicación	
Cerradura	Para todo a y b en \mathbb{R} , ab está en \mathbb{R} y ab es único (esto quiere decir que si multiplicamos dos números reales el resultado es otro número real, y el resultado de multiplicar dos números es único: no puede tener dos valores distintos).
Asociatividad	Para todo a , b y c en \mathbb{R} , $(ab)c = a(bc)$ (si asociamos de diferente manera para multiplicar tres números el resultado es el mismo).
Existencia del idéntico	Existe en \mathbb{R} un único elemento 1 ($1 \neq 0$) con la propiedad de que para todo a en \mathbb{R} , $1(a) = a$ y $a(1) = a$. Ejemplo: $1(7) = 7$ y $7(1) = 7$
Existencia de los inversos	Para cada a en \mathbb{R} , excepto 0 , existe un elemento $\frac{1}{a}$ en

	R tal que $(a)\left(\frac{1}{a}\right)=1$ y $\frac{1}{a}(a)=1$. Ejemplo: $3\left(\frac{1}{3}\right)=1$ y $\frac{1}{3}(3)=1$.
Conmutatividad	Para todo a y b en R, $ab=ba$ (el orden de los factores no altera el producto). Ejemplo: $3 \times 4=4 \times 3$.

El número $\frac{1}{a}$ se llama inverso multiplicativo o recíproco de a. Así, el inverso multiplicativo de 4 es $\frac{1}{4}$ y el de $\frac{1}{4}$ es 4.

Axioma distributivo de la multiplicación Con respecto a la adición.	Para todo a, b y c en R, $a(b+c) = ab + ac$ $(b+c)a = ba + ca$ Ejemplos: 1) $3(2+5) = (3)(2)+(3)(5)= 6 +15 = 21$ 2) $(2+5)3 = (2)(3) + (5)(3) = 6 + 15 =21$.
--	---

LENGUAJE ALGEBRAICO

Ejemplos de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Un número cualquiera	X
La suma de dos números	X+y
La diferencia de dos números	x-y
El producto de dos números	xy
El cociente de dos números	$\frac{x}{y}$
La suma de dos números dividida entre su diferencia	$\frac{x+y}{x-y}$
El cubo de un número	X^3

El doble del cubo de un número	$2x^3$
La suma de los cuadrados de dos números	x^2+y^2
El cuadrado de la suma de dos números	$(x+y)^2$
La tercera parte del cubo de un número	$\frac{x^3}{3}$
El cubo de la tercera parte de un número	$\left(\frac{x}{3}\right)^3$
¿Cuál es el número que disminuido en 5 da por diferencia 7?	$x-5 = 7$

Las siguientes expresiones algebraicas, tienen su traducción al lenguaje común.
 $3(x-y)$, se puede leer así “el triple de la diferencia de dos números cualesquiera”.
 $(x+y)^3$, puede expresarse como: “el cubo de la suma de dos números”.

MEDIDAS DE LONGITUD.

La unidad principal para medir longitudes es el metro.
 Existen otras unidades, las más usuales son:

kilómetro	km	1000 m
hectómetro	hm	100 m
decámetro	dam	10 m
metro	m	1 m
decímetro	dm	0.1 m
centímetro	cm	0.01 m
milímetro	mm	0.001 m

Otras medidas de longitud. **Para medidas microscópicas se utilizan.**

La micra

Equivale a una millonésima parte de un metro.

$$1 \mu = 0.000001 \text{ m}$$

El nanómetro

Utilizada para medir la radiación ultravioleta, radiación infrarroja y la luz. Equivale a una mil millonésima partes de un metro.

$$1 \text{ nm} = 0.000000001 \text{ m}$$

El ángstrom

Es la unidad empleada principalmente para expresar longitudes de onda, distancias moleculares y atómicas. Equivale a una **diez mil millonésima parte de un metro**.

$$1\text{Å} = 0.0000000001 \text{ m.}$$

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

FUENTES DE INFORMACIÓN

Fuentes consultadas

BARNETT, R. (1999) Álgebra. Sexta edición. Mc Graw Hill. México.

CALVO, Mendoza José Luis y Cols. (2009). Curso Multimedia. Química 1. Colegio de Bachilleres. México, D. F. Oficinas Generales.

CAMPILLO, H (1994) DICCIONARIO ACADEMIA AVANZADO. Fernández Editores. México.

CANO, J. (2009) Matemáticas 1.ESO, LOE. Bruño. Madrid España.

CANO, J. (2009). Matemáticas 2.ESO, LOE. Bruño. Madrid España.

CANO, J. (2009). Matemáticas 3.ESO, LOE. Bruño. Madrid España.

CANO, J. (2009) Matemáticas 4.ESO, LOE. Bruño. Madrid España.

CERVANTES, Víctor Luis. (1998). El ABC de los Mapas Mentales. Una guía sencilla y completa, ¡puesta en acción!, sobre la más poderosa técnica gráfica de aprendizaje y creatividad en el mundo. Asociación de Educadores Iberoamericanos. México, D. F. p. 14

COLERA, J. (2009). Bachillerato 1. Matemáticas I. Grupo ANAYA. Madrid España.

DUGOPOLSKI, M. (2006). Intermediate Algebra. fifth edition. McGraw Hill. USA.

EXPRESO. 1975. Benedetti, Mario. El Hombre que espera milagros. Ensayo. Edición del 2 de agosto de 1975. Lima, Perú
http://www.roland557.com/ensayos/critica_literaria.htm

FERNÁNDEZ, J. Á. (2008) Matemáticas 2. ESO, Grupo editorial Bruño. Madrid, España

MARTÍNEZ Aguilera, M. (1996) Ángel. Aritmética y Algebra. McGraw Hill. México.

NOREÑA, F. El develador de las incógnitas Carl F. Gauss. Publicaciones Culturales, Pangea, pp. 12-14.

ONTORIA, Antonio; Ballesteros, A.; Cuevas; Giraldo, L.; Martín, I; Molina, A.; Rodríguez, A. y Vélez. U. (1993). Mapas Conceptuales. Una Técnica para Aprender. Narcea, S. A. de Ediciones. Madrid. p. 38

ORTIZ, C. F. (2004). Matemáticas 1. Publicaciones Culturales. México.

RANDALL, C. (1999) MIDDLE SCHOOL MATH. Scott Foresman – Addison Wesley. USA.

VALIENTE, S. (1998). DICCIONARIO DE MATEMÁTICAS. Addison Wesley Longman. México.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. Prueba “Enlace 2009”, bachillerato, pp.8.

Páginas de Internet:

<http://www.aaamaticas.com/cmp42ax2.htm>

<http://www.elocal.gob.mx/work/templates/enciclo/veracruz/municipios/30003a.htm> 2004.

Figuras

Figura 5. Pedro Castro Ortega, Matemáticas. Secundaria-Bachillerato.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - México

Lecturas recomendadas

FUENLABRADA DE LA VEGA, S. (2007). Aritmética y Álgebra. 3ª Edición. México: McGraw Hill.

GROSSMAN, S. (2008). Algebra Lineal. 6ª Edición. México: Editorial McGraw Hill

www.purplemath.com/

Lecciones prácticas de Álgebra con ejercicios resueltos interactivos.

<http://www.rena.edu.ve/>

Página del ministerio de educación del gobierno de Venezuela, trata todos los temas de Álgebra.

<http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>

Biblioteca de manipuladores virtuales de USA, en español contiene material complementario de Álgebra.

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres MÉXICO

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

DIRECTORIO

Roberto Castañón Romo
Director General

Luis Miguel Samperio Sánchez
Secretario General

Miguel Ángel Báez López
Director de Planeación Académica

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

Agradecemos la participación de:

Liliana Aldana Alavez
Cristóbal Godoy Arriaga
Mario Luis Flores Fuentes
Mauro Fuentes Hernández
Ernesto Rivera Montiel
María Patricia Rodríguez Hernández
Alma Delia Rodríguez Muñoz
Guadalupe Mercedes Rodríguez Segundo
María Guadalupe Romero Fuentes
Moisés Vázquez Vargas
Mario Francisco Vicencio Martínez

1ra. Ver. 2010 Derechos Reservados Colegio de Bachilleres - MÉXICO

México 2010